Note Technique du CNES N° 148 Décembre 2002

Titre *(Title)* : **L'optimisation : deux ou trois choses que je sais d'elle** *(Optimization : some things of this world)*

Auteur *(Author)* : **Jean-Baptiste Hiriart-Urruty**, Université PAUL SABATIER Toulouse III, laboratoire MIP, 118, route de Narbonne - 31062 Toulouse Cedex 04. *(Ce travail a été effectué pendant le séjour au CNES de l'auteur)*

Mots clés *(Keywords)* : **Optimisation** *(Optimization)*, **Commande optimale** *(Optimal control)*, **Optimisation dans les sciences pour l'ingénieur** *(Optimization in engineering sciences)*, **Méthodes directes en optimisation** *(Direct methods in optimization)*, **Méthodes de points intérieurs** *(Interior point methods)*, **Optimisation globale** *(Global optimization)*, **Optimisation sous contraintes de semidéfinie positivité** *(Semidefinite programming)*

Résumé :
Dans cet exposé destiné à des scientifiques qui ne sont pas spécialistes du sujet, nous brossons un tableau des grandes lignes de force qui ont marqué la recherche en Optimisation ces dernières années.

Abstract:
In the present report aimed at people who are not experts in this field, we draw a picture of the mainstreams noticed in research in Optimization during the last years.

Sommaire

1 Analyse et Calcul variationnels, Optimisation

1.1 Introduction

FERMAT, HUYGENS, les frères BERNOULLI, NEWTON, LEIBNIZ, ...autant de grands scientifiques du XVII^e siècle (mais aussi DESCARTES, PASCAL), siècle qui a vu la *mathématisation de la notion de mouvement* (vitesse, accélération, ...) et auquel ont contribué les personnes citées. Il n'est donc pas étonnant que le XVII^e siècle ait vu :

- la naissance du calcul *différentiel*,

- l'énoncé des premiers principes et problèmes dits *variationnels*.

Avec, en 1696 [1], la mise sur la place publique du problème de la courbe *brachystochrone* par Johan BERNOULLI peut être datée la naissance du *Calcul des variations* ou, dans une appellation plus moderne, l'*Analyse et le Calcul variationnels*. Rappelons brièvement de quoi il s'agissait. Dans le plan vertical, on souhaite aller de A à B sous le seul effet de la force de gravitation, et ce le plus vite possible ; quelle est pour cela la trajectoire qu'il faut suivre ? On peut imaginer qu'il s'agisse de dessiner un toboggan reliant A à B, sur lequel, négligeant les forces de frottement, on descende le plus rapidement possible. La réponse est connue - elle l'était d'ailleurs au moment où le problème fut posé -, il s'agit d'une arche de cycloïde. Le

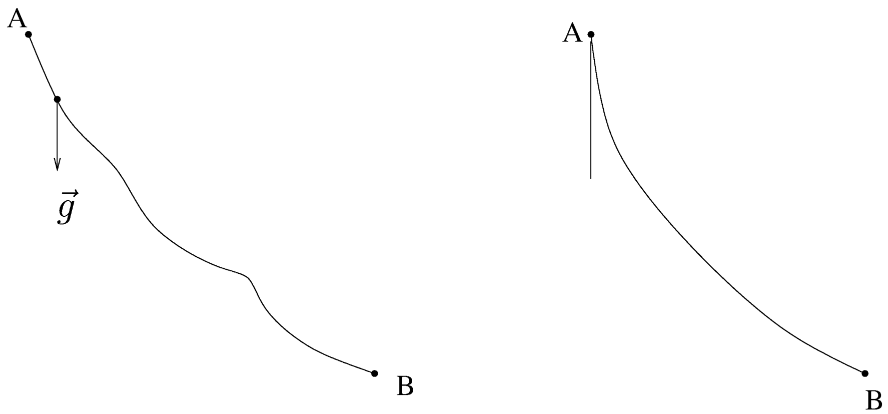


Fig. 1 –

Calcul des variations fut développé au XVIII^e siècle par EULER et LAGRANGE, au XIX^e par LEGENDRE, JACOBI, HAMILTON et WEIERSTRASS. La première moitié du XX^e siècle vit les contributions importantes de BOLZA, BLISS, etc. La deuxième moitié du XX^e siècle verra naître une forme moderne de l'Analyse et Calcul variationnels, à savoir la *Commande optimale*. Précédé par des travaux d'ingénieurs, ce domaine d'études fut impulsé par les besoins de résoudre des problèmes issus du monde spatial ; les deux noms qui ressortent sont ceux de BELLMAN aux Etats-Unis (et sa *programmation dynamique*) et de PONTRYAGIN et al. en

[1] En 1996 fut fêté le 300^e anniversaire de cet événement (1 $\begin{smallmatrix}6\\9\end{smallmatrix}$ 96, observons la belle symétrie du graphisme !) ; les médias n'en ont pas parlé pour autant...

U.R.S.S. (et le fameux *principe du maximum*).

Le lecteur trouvera

- dans [11] et [38] une histoire du développement de l'Analyse et Calcul variationnels depuis le problème de la courbe brachystochrone jusqu'au principe du maximum de PONTRYAGIN,

- dans [19] des explications et de superbes illustrations sur "les formes optimales dans la nature",

- dans [13] une étude, historique et philosophique, sur les principes variationnels, centrée autour du "principe de moindre action" de MAUPERTUIS.

L'*Optimisation*, telle que nous l'appelons aujourd'hui, appelée aussi *Programmation mathématique* lorsque le contexte du problème est de dimension finie (une traduction malheureuse du terme anglais *Mathematical programming*), s'est aussi developpée dans sa forme moderne au cours de la deuxième moitié du XX^e siècle. Nous lui consacrerons l'essentiel de notre exposé, en mettant l'accent sur les grandes lignes de force qui se sont dégagées dans les recherches dans ce domaine au cours des dix dernières années.

Un problème variationnel ou d'optimisation en bref, c'est quoi ? C'est celui posé de manière abrégée comme suit :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \text{Minimiser} \quad f(x) \quad \text{(noté souvent } J\text{(x) en Calcul variationnel)} \\ \text{sous la condition } x \in C. \end{cases}$$

$f(.)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée *critère, coût, fonction-objectif,* etc. (pas toujours facile de déterminer ce qu'il faut prendre !), et "$x \in C$" est la contrainte imposée aux variables x (contrainte qui peut prendre des formes très variées). Nous n'abordons pas ici le cas où on prend en compte plusieurs critères à la fois (Optimisation dite multicritère).

Quelles sont les questions que l'on peut se poser à propos de $(\mathcal{P})$?

(1) . Existence et unicité des solutions.
(2) . Conditions nécessaires d'optimalité (c'est-à-dire des conditions nécessairement satisfaites par un condidat à être solution de $(\mathcal{P})$).
(3) . Conditions suffisantes d'optimalité
(si on peut avoir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, c'est-à-dire des *caractérisations* des solutions de $(\mathcal{P})$, tant mieux, mais c'est plutôt rare !).
(4) . Algorithmes de calcul (c'est-à-dire, méthodes itératives d'approximation de solutions de $(\mathcal{P})$).
(5) . Analyse qualitative de $(\mathcal{P})$: comment transformer $(\mathcal{P})$ en un problème parent, le "dualiser" (attaque du problème original par une autre face), étudier la sensibilité aux perturbations, la "robustesse"...

Quelle est la trace de ces divers points en ingénierie ?

- (2) et (3) sont à la base de l'utilisation de l'Optimisation en ingénierie, surtout (2), qui est là pour suggérer des condidats à être solutions du problème posé (ceci est particulièrement vrai en Commande optimale).
- (4) et (5), cela va sans dire.

Le seul vocable de "problèmes de moindres carrés" couvre une part essentielle de l'intervention de l'Optimisation dans l'étude des systèmes d'ingénierie.
Pour une introduction simple à quelques problématiques de l'Optimisation posées ci-dessus, le lecteur pourra se référer au livret [21].

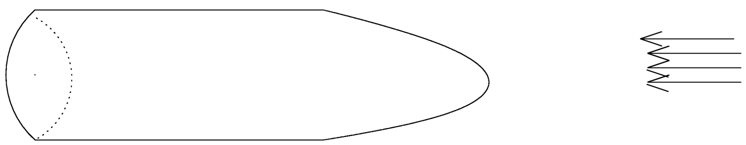
Notons que dans cet exposé nous avons délibérément laissé de côté

- l'intervention de l'*aléa* (rien n'y est stochastique),
- tout ce qui a trait aux données *discrètes* (Optimisation en nombres entiers, combinatoire), pourtant si important dans les applications.

Nous abordons à présent un exemple d'Analyse et calcul variationnel, dans ce qu'il a de plus ancien et de plus moderne, celui du problème aérodynamique de NEWTON.

1.2 Le problème aérodynamique de NEWTON : toujours du nouveau sur un vieux problème

En 1686, NEWTON considère la question suivante : parmi les corps de même base (un disque de rayon R donné), de longueur totale limitée (à L donné), quelle est la forme de celui qui offrira le moins de résistance à l'avancée à vitesse constante dans un fluide (air par exemple) ?



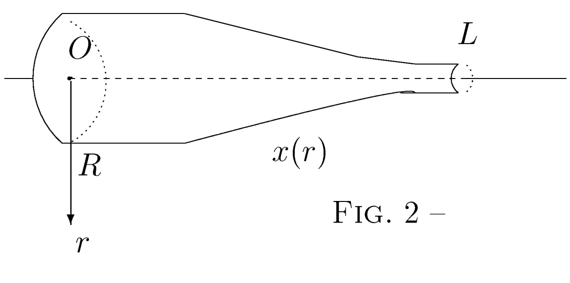


FIG. 2 –

NEWTON considérait des corps de révolution (dessinés par les graphes de fonctions $r \mapsto x(r)$ tournant autour de l'axe horizontal, cf. Figure 2), et moyennant des hypothèses sur la Physique du problème (qui restent valides dans certains contextes en Aérodynamique) il arrivait au problème de calcul variationnel suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser} \quad J(x) := \displaystyle\int_0^R \frac{r}{1+ \mid \dot{x}\ (r)|^2} dr \\ x(0) = L, \quad x(R) = 0 \\ \dot{x}\ (r) \leq 0, \quad r \in [0, R]. \end{cases}$$

L'hypothèse de monotonie ($\dot{x} \leq 0$) ne figurait pas dans la première approche de NEWTON, et il fut critiqué pour cela (car l'absence de cette hypothèse fait que la borne inférieure est nulle dans $(\mathcal{P})$ et qu'il n'y pas de solutions) ; toutefois NEWTON l'avait intégrée dans sa démarche et la solution qu'il conjecturait (Figure 3) se trouve être correcte. Une des manières standards

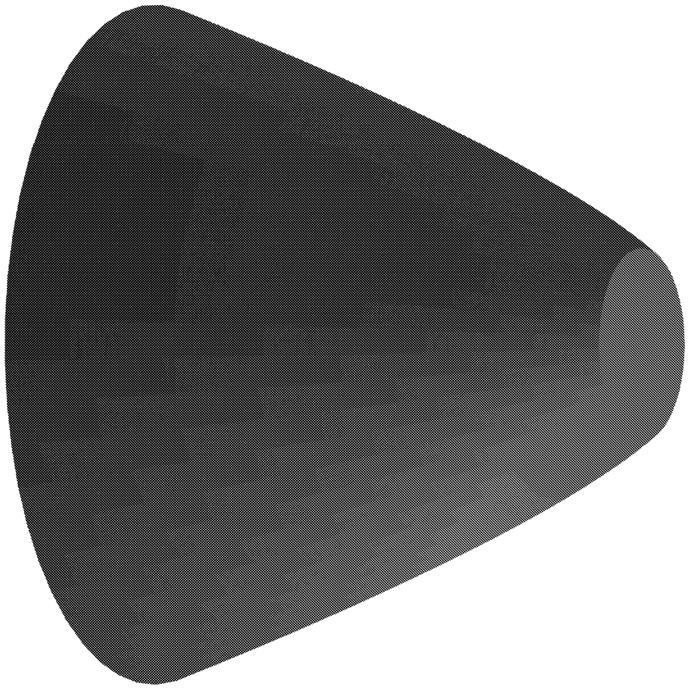


FIG. 3 –

de résoudre $(\mathcal{P})$ de nos jours est via les résultats de la Commande optimale (cf. 1.3 infra) : $\dot{x}= u$ est la commande et $U = \mathbb{R}^-$ est l'ensemble des commandes admissibles.

La plupart des auteurs ont considéré le problème ouvert par NEWTON comme clos. C'est effectivement le cas (c'est-à-dire que cela a été demontré mathématiquement) si l'on suppose la *symétrie radiale* des corps considérés (corps de révolution dessinés par les graphes de fonctions $x(.)$ tournant autour de l'axe horizontal). Toutefois, très récemment il a été exhibé, dans [17] notamment, une forme de corps sans symétrie radiale pour laquelle la valeur de la résistance (correspondante à $J(.)$ dans $(\mathcal{P})$) est plus faible que dans le cas de NEWTON. Il s'agit d'une sorte de tête de tournevis ou de toile de tente (cf. Figure 4). Ce type de découverte a relancé les recherches sur le sujet ; pour en savoir plus, le lecteur intéressé pourra se reporter à [12], [9] et [24]. Néanmoins le problème aérodynamique de NEWTON n'est pas résolu dans sa plus grande généralité, il reste un problème variationnel difficile.

En bref :

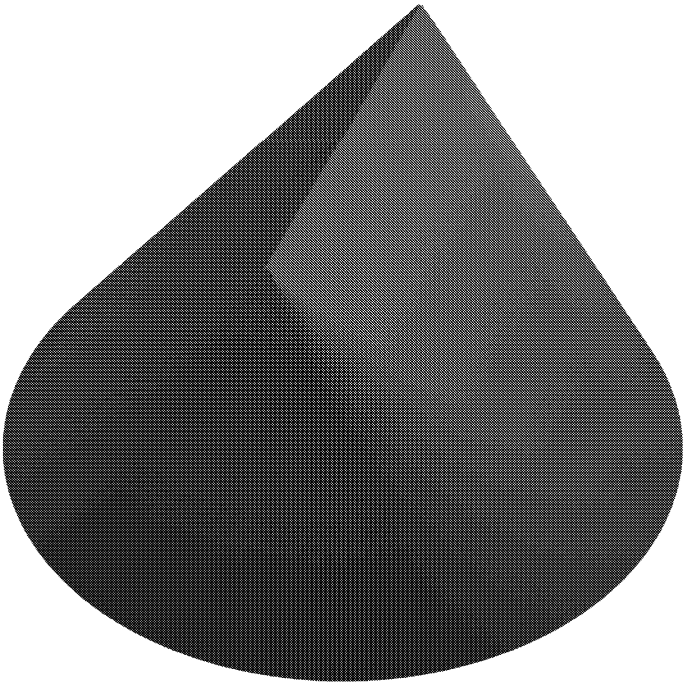


FIG. 4 –

- de vieux problèmes ressurgissent parfois et donnent lieu à des créations en mathématiques,
- l'Analyse et le Calcul variationnels restent un domaine de recherche extrêmement actif, qui peut prendre des aspects très variés (optimisation de formes en Aérodynamique, Economie mathématique).

1.3 La commande optimale en Sciences pour l'ingénieur

A la différence de l'Analyse et Calcul variationnels où l'on "laisse faire la nature" (on cherche $x(.)$ minimisant

$$J(x(.)) := \int_{t_0}^{t_f} l(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

sous certaines contraintes sur $(t_0, x(t_0))$ et $(t_f, x(t_f))$), en Commande optimale on *agit* par l'intermédiaire de $t \mapsto u(t)$ (appelée fonction de commande) de manière à minimiser un certain critère, tout en satisfaisant un certain nombre de contraintes sur les inconnues. D'une manière schématique :

- l'état $x(.)$ du système évolue suivant

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

où $u(.)$ est soumis à des contraintes $u(t) \in U$,

- le critère à minimiser prend la forme générale

$$J := g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} l(t, x(t), u(t))dt\ ,$$

- $(t_f, x(t_f))$ (et, plus rarement, $(t_0, x(t_0))$) peut faire partie des inconnues du problème,

- il peut y avoir des contraintes sur $x(.)$ et $u(.)$, réparties sur $[t_0, t_f]$:

$$g_i(x(t), u(t)) \leq 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, p \quad \text{par exemple,}$$
$$h_j(x(t)) = 0 \qquad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, q$$

(ces dernières sont des contraintes sur l'état seul, les plus difficiles à prendre en compte car elles ne font apparaître que $x(.)$, alors que la vraie inconnue est $u(.)$).

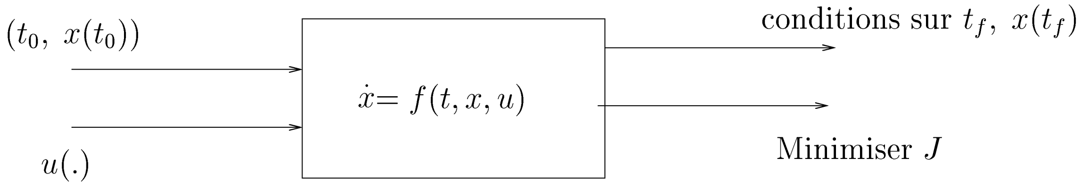


Fig. 5 –

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser } J \text{ (fonction de } u(.),\ \text{parfois de } t_f, x(t_f)) \\ \dot{x}\ (t) = f(t, x(t), u(t)) \quad u(t) \in U \\ \text{conditions sur } t_f, x(t_f) \\ \text{conditions sur } (x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_f]. \end{cases}$$

Un exemple - pas seulement d'école - est le suivant : une rame de métro que l'on prend à l'instant $t_0 = 0$ dans les conditions initiales $(x(0) = x_0,\ \dot{x}\ (0) = v_0)$ doit être ramenée à la position terminale $(x(t_f) = x_f,\ \dot{x}\ (t_f) = 0)$; la commande sur laquelle on peut jouer est l'accélération $\ddot{x}= u$, mais elle est contrainte $|u(t)| \leq u_{max}$; le critère choisi est une combinaison de t_f et de la consommation $\int_0^{t_f} |u(t)|dt$.

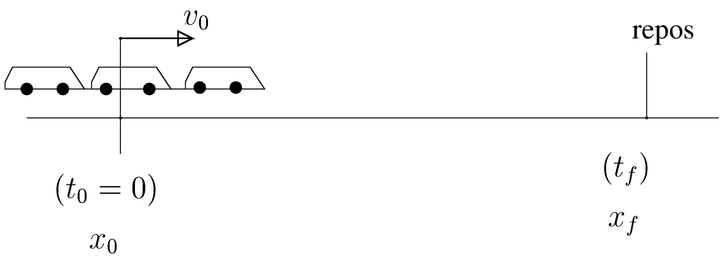


Fig. 6 –

Le problème de commande optimale se formalise en :

$$\begin{cases} \text{Minimiser} \quad J := \alpha t_f + \beta \displaystyle\int_0^{t_f} |u(t)|dt \\ t_f > 0 \\ \ddot{x}\ (t) = u(t)\ ,\ |u(t)| \leq u_{max} \text{ pour } t \in [0, t_f] \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}\ (0) = v_0 \\ x(t_f) = x_f, \quad \dot{x}\ (t_f) = 0. \end{cases}$$

Historiquement, ce sont des problèmes en temps minimal (i.e. $t_f > 0$ fait partie des inconnues) posés par les ingénieurs dans le secteur aéronautique et spatial qui ont stimulé les recherches qui conduiront au point d'orgue que représente le principe du maximum de PONTRYAGIN (PMP en abrégé). Qu'est - ce que le PMP ? C'est une condition *nécessaire* d'optimalité, c'est - à - dire un jeu de relations que doit nécessairement vérifier $\bar{u}(.)$ (ou $\bar{u}(.)$, $\bar{t}_f$) candidat(s) à être solution(s) de $(\mathcal{P})$. Avoir dérivé le PMP est sans doute l'une des réalisations mathématiques les plus brillantes de la deuxième moitié du XX^e siècle. Le processus de découverte et de démonstration du PMP ne fut pas d'ailleurs exempt de difficultés (dues aux mathématiques mais aussi aux personnes impliquées) ; à cet égard on lira avec intérêt [16] et - surtout -[4] qui se dévore comme un roman policier.

Bien que l'intérêt dans la recherche en Commande optimale ait décrû en France depuis les années 1960-1970 où ce sujet était "chaud" (il reste néanmoins important en Allemagne, Russie et Etats-Unis), son intervention et ses applications restent primordiales dans les sciences appliquées ; on peut mentionner à titre d'exemples :

- le secteur aéronautique et spatial ([2, 27, 28, 29, 32]),
- la Robotique ([36, 37]),

mais aussi

- l'Economie mathématique ([22]),
- la Biomathématique et Médecine ([39, 40]).

Pour les méthodes de résolution d'un problème de commande optimale (via une discrétisation directe du problème, ou la résolution du problème aux deux bouts résultant du PMP), citons [32, 2] et les récents [5, 3].

Pour ce qui est de la formation d'un ingénieur dans ce domaine des mathématiques appliquées, il est clair que ce n'est pas l'aspect existence des solutions qui est important (dans des espaces de fonctions absolument continues inévitablement), mais bien l'utilisation correcte du PMP pour détecter les commandes $\bar{u}(.)$ (et donc les trajectoires associées $\bar{x}(.)$) candidates à être solutions, et les méthodes numériques d'approximation de ces commandes et trajectoires. Ainsi les commandes continues par morceaux (et les trajectoires $\mathcal{C}^1$ par morceaux associées) sont celles qu'on utilise le plus en pratique. Parmi les multiples références consacrées à ce sujet, nous conseillons, pour le point de vue que nous venons d'évoquer, l'ouvrage [20] (ainsi que [10] qui reste une bonne source d'exemples).

2 Les grandes lignes de force de la recherche en Optimisation ces dernières années

Reprenons les questions posées à propos d'un problème d'optimisation $(\mathcal{P})$ (cf. § 1.1).
(1). Existence et unicité des solutions. Disons que c'est l'affaire des mathématiciens…Par l'utilisation des techniques et résultats de l'Analyse réelle et fonctionnelle, le mathématicien n'aura de cesse que de se mettre en situation où $(\mathcal{P})$ a une et une seule solution.
(2). Conditions nécessaires d'optimalité. C'est un point-clé de la théorie. Précédant le PMP de PONTRYAGIN et associés (circa 1960), il y a les conditions d'optimalité de KARUSH-KUHN-TUCKER (circa 1951), KKT en abrégé, forme moderne et généralisée des conditions et multiplicateurs de LAGRANGE.
(3). Dualisation du problème "primal" $(\mathcal{P})$. Sans rentrer dans les détails techniques, disons qu'il est toujours possible d'associer à $(\mathcal{P})$ un "problème dual" $(\mathcal{D})$, en général de structure plus simple que $(\mathcal{P})$, dont la résolution (séparée ou en association avec $(\mathcal{P})$) donne des informations sur la valeur optimale et les solutions dans $(\mathcal{P})$.
Toutes ces considérations ont des retombées en algorithmique : il s'agit ici de créer de manière itérative une suite de points (x_k) de l'espace $X = \mathbb{R}^d$ des paramètres, dont on espère qu'elle convergera vers un point $\bar{x}$ vérifiant, à tout le moins, les conditions nécessaires d'optimalité de type KKT. Comme on imagine converger non pas vers un minimiseur global (qui serait une " vraie solution" de $(\mathcal{P})$) mais vers un minimiseur local au mieux, on parle d'*algorithmique d'optimisation locale.*

Quelles sont les motivations des travaux de recherche en Optimisation ?

- Tout d'abord, et comme dans tout autre domaine scientifique, la curiosité et le désir d'avancement des connaissances (en forme imagée, "on gratte là où ça démange").

- Les demandes des secteurs utilisateurs, et les Sciences pour l'ingénieur en sont un exemple de premier ordre.

Nous passons à présent en revue des domaines qui, de notre point de vue, marquent les grandes lignes de force de la recherche en Optimisation ces dernières années :

- les évolutions dans l'*Optimisation à données linéaires ou affines* (désignée encore sous le vocable de Programmation linéaire),
- les *méthodes directes* en optimisation sans contraintes,
- les *méthodes de points intérieurs*,
- l'*Optimisation globale*,
- l'*Optimisation sous contraintes de semidéfinie positivité* (SDP en abrégé) et ses liens avec les *inégalités matricielles linéaires* (IML en abrégé) en Automatique.

2.1 Optimisation à données linéaires (ou Programmation linéaire)

On désigne par ce vocable les problèmes d'optimisation dans lesquels la fonction-objectif comme les fonctions définissant les contraintes sont linéaires (ou affines).

$$\begin{cases} \text{Minimiser (ou Maximiser) } f(x) := \displaystyle\sum_{i=1}^{d} c_i x_i \\ \qquad \big(\langle c, x\rangle \text{ ou } c^T x \text{ en abrégé}\big) \\ \text{sous la contrainte : } x \in \Pi \text{ } (\Pi \text{ est un polyèdre convexe fermé, habituellement} \\ \qquad \text{décrit sous la forme } Ax \leq b,\ x \geq 0). \end{cases}$$

Historiquement, c'est ce domaine particulier de l'Optimisation qui s'est d'abord développé au sortir de la deuxième guerre mondiale ; on y parlait par exemple de "problème dual" bien avant que ce concept ne fut formalisé pour un problème d'optimisation général. Que dire de ce domaine ?

- Premièrement, qu'il est toujours en haut de l'affiche en recherche et formation en Optimisation, et ce depuis plus de cinquante ans (c'est suffisamment rare pour être souligné, dans ce secteur si rapide en évolutions qu'est celui des mathématiques appliquées). Il a bien entendu un impact important dans les sciences de l'ingénieur.

- Il a fortement été marqué par les algorithmes "du type simplexe" (depuis les travaux pionniers de DANTZIG, KANTOROVITCH), au point que cette algorithmique particulière en faisait un sujet à part et bien répertorié en Optimisation. Ce point de vue est corroboré par le classement suivant des "dix premiers algorithmes de XX^e siècle" (selon la Society of Industrial and Applied Mathematics, 2000) : l'algorithme dit "du simplexe" en Programmation linéaire arrive en no. 2 ; ce n'est que justice eu égard à son formidable impact dans les applications industrielles et dans les services.

Top Ten Algorithms of the 20$^{\text{th}}$ century

1. The Monte Carlo method (1946) : John von Neumann, Stanislaw Ulam, and Nick Metropolis at the Los Alamos Scientific Laboratory.
2. The simplex method for linear programming (1947) : George Dantzig at the RAND Corporation.
3. Krylov subspace iteration methods (1950) : Magnus Hestenes, Eduard Stiefel, and Cornelius Lanczos at the National Bureau of Standards.
4. The decompositional approach to matrix computations (1951) : Alston Householder at Oak Ridge National Laboratory.
5. FORTRAN optimizing compiler (1957) : John Backus and team at IBM.
6. The QR algorithm (1959-61) : J.G.F Francis at Ferranti Ltd., London.

7. Quicksort (1962) : Tony Hoare at Elliott Brothers, Ltd., London.
8. The fast Fourier transform (1965) : James Cooley at IBM T.J. Watson Research Center and John Tukey at Princeton University at AT&T Bell Laboratories.
9. The integer relation detection algorithm (1977) : Helaman Ferguson and Rodney Forcade at Brigham Young University.
10. The fast multiple algorithm (1987) : Leslie Greengard and Vladimir Rokhlin at Yale University.

For details, see Barry Cipra's article "The Best of the 20^{th} Century : Editors Name Top 10 Algorithms", SIAM news, Vol. 33, No. 4, May, 2000, p. 1 ; http ://www.siam.org/siamnews. The list was compiled by Jack Dongarra of the University of Tennessee and Oak Ridge National Laboratory and Francis Sullivan of the Center for Computing Sciences at the Institute for defense Analyses ; it first appeared in the January/February 2000 issue of *Computing in Science & Engineering*, a joint publication of the American Institute of Physics and the IEEE Computer Society.

L'évolution des quinze dernières années en Programmation linéaire a été marquée par l'introduction des algorithmes "à la KARMARKAR" (1985) et la "révolution des points intérieurs" qui s'en est suivie ; nous y reviendrons au § 2.3. Une conséquence en a été aussi une *amélioration très nette* des algorithmes du type simplexe, sous l'effet de la concurrence et du défi posés.

En ce qui concerne la formation d'un ingénieur, on ne peut imaginer qu'elle passe à côté de rudiments (au moins) de Programmation linéaire, et même de Programmation linéaire en nombres entiers. De plus, des domaines d'applications récents tels que l'optimisation dans le cadre de la téléphonie mobile (conception de réseaux, dimensionnement de centre d'appels, etc.), d'une extraordinaire complexité et modernité, incitent à s'y intéresser encore d'avantage.

2.2 Les méthodes directes en Optimisation sans contraintes

On considère un problème d'optimisation sans contraintes :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in X \equiv \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

le cas des problèmes avec contraintes n'ayant pas suffisamment été fouillé pour ce qui est des méthodes directes, objet du paragraphe présent.

Quel est le *contexte* du problème ?

- les gradients de f (en x_k, point courant considéré) ne sont pas disponibles (ou trop coûteux, ou même n'existent pas),

- le calcul de f (en x_k) peut être coûteux (résultat d'une simulation, de la résolution d'un système d'équations, d'une équation aux dérivées partielles, etc.),

- la valeur de $f(x_k)$ peut être "bruitée" (de manière inhérente, pour des raisons variées).

Quel est le *but* dans le problème ?

-Minimiser la fonction-objectif f certes. . .ou du moins améliorer une situation donnée.

Qu'entend - on par *méthode directe d'optimisation* ?

- C'est un algorithme qui utilise dans son déroulement les évaluations de la fonction-objectif exclusivement.

- Elle *ne* consiste *pas* à imiter les méthodes de type gradient en prenant des différences finies (comme substituts de gradients).

L'exemple le plus connu, et parmi les plus anciens, des méthodes directes est la méthode dite "du simplexe" de NELDER et MEAD (1965), que nous préférons appeler "méthode du polytope mouvant" (pour éviter la confusion avec la méthode du simplexe en Programmation linéaire). Grosso modo, il s'agit, en utilisant les évaluations de la fonction-objectif, de construire une suite de polytopes par des opérations simples (dilatation, rétrécissement, réflexion), suite qui finit par se concentrer sur un point dont on pense qu'il a un intérêt pour le problème d'optimisation considéré. Faciles à programmer, la méthode du polytope mouvant et ses variantes sont très populaires chez les utilisateurs. Leurs déficiences sont connues : efficaces seulement lorsque la dimension d de l'espace des variables est peu élevé, résultats théoriques de convergence peu convaincants. Mc KINNON a même proposé en 1997 un exemple de fonction de deux variables, strictement convexe et de classe $\mathcal{C}^2$, pour laquelle la suite des polytopes engendrés par la méthode du polytope mouvant finit par se concentrer en un point où le gradient ne s'annule pas (point qui ne présente pas d'intérêt pour la minimisation de la fonction-objectif convexe en question). Mais, comme le dit POWELL ([35], p. 330), "il semble qu'il n'y ait pas une quelconque corrélation entre les algorithmes qui sont utilisés régulièrement dans les applications pratiques et ceux pour lesquels il y a des résultats de convergence en théorie".
Les méthodes du type de celui du polytope mouvant n'étaient pas appréciées par les spécialistes des algorithmes d'optimisation : POWELL dit qu' "il n'a jamais aimé les méthodes directes du type simplexe", LEMARECHAL a parlé de "méthodes de paresseux", . . .Voir aussi le titre de [42].

Toutefois on a assisté à un *renouveau* d'intérêt, de recherches, et de résultats à propos des méthodes directes, et ce lors des *dix* dernières années (à partir de 1989 plus précisément). La motivation venait des problèmes pratiques à résoudre, où le contexte faisait apparaître les points signalés au début du paragraphe.

Que dire de ces nouvelles méthodes directes ? Qu'elles sont en gros de deux types :

- basées sur la construction de modèles de la fonction-objectif (par interpolation, approximation, . . .), ce qui suppose une "régularité" sous-jacente de la fonction-objectif,

- de type "géométrique" : on crée et utilise par transformation un objet géométrique, un polytope par exemple, représentant l'information relative à la fonction-objectif.

En opposition avec les différences finies, dans ces méthodes directes les évaluations de la fonction-objectif se font en des points "assez écartés", ce qui présente un intérêt évident pour la robustesse lorsque les données sont bruitées.

A quoi est-on ainsi arrivé ?

- à de nouvelles méthodes directes, y compris des codes publics mis à disposition,
- mais aussi de nouveaux résultats de convergence, concernant parfois des "vieilles méthodes" (travaux de V. TORCZON, J. DENNIS, etc.).

Pour éviter de se noyer dans les références, nous suggérons au lecteur de s'en tenir à des articles-revues récents tels que [35, 25].

Pour ce qui concerne la formation en Optimisation numérique, reconnaissons que les méthodes directes ne figuraient pas dans les cours habituels ; elles ont fait depuis peu leur entrée au niveau des Maîtrises en ingénierie mathématique ou cursus d'ingénieurs (chapitre 8 de [23], [30] par exemple).

2.3 Les méthodes de points intérieurs

Considérons ici un problème d'optimisation avec contraintes, des contraintes du type inégalité pour simplifier

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ g_1(x) \leq 0,\ g_2(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0 \\ x \in X \equiv \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Il y a deux approches au moins pour intégrer les contraintes dans un nouveau problème d'optimisation, sans contraintes celui-là, celle par "pénalisation" et celle par "intériorisation".

La *pénalisation* (extérieure), c'est quoi ?

C'est substituer à $(\mathcal{P})$ une famille $(\mathcal{P}_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$ de problèmes sans contraintes du type suivant (par exemple) :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser } \left\{ f(x) + \dfrac{1}{\varepsilon} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} [g_i^+(x)]^2 \right\} \\ x \in X, \end{cases}$$

où $g_i^+(x)$ est la partie positive de $g_i(x)$, i.e. $g_i(x)$ si $g_i(x) > 0$, 0 si $g_i(x) \leq 0$.

L'idée de choisir $[g_i^+(x)]^2$ plutôt que $g_i^+(x)$ (par exemple) vient du souhait de "lisser" la nouvelle fonction-objectif, c'est-à-dire d'assurer qu'elle est différentiable (du premier ordre) lorsque les données f, $g_1, \ldots,$ g_m le sont. Plus $\varepsilon > 0$ est petit ($1/\varepsilon$ grand), plus on paie fort pour x_k le fait de ne pas satisfaire les contraintes. On espère qu'avec $\varepsilon \to 0$, une solution $\bar{x}_\varepsilon$ de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ converge vers une solution de $(\mathcal{P})$, "par l'extérieur" de l'ensemble-contrainte. C'est l'idée de la pénalisation extérieure.

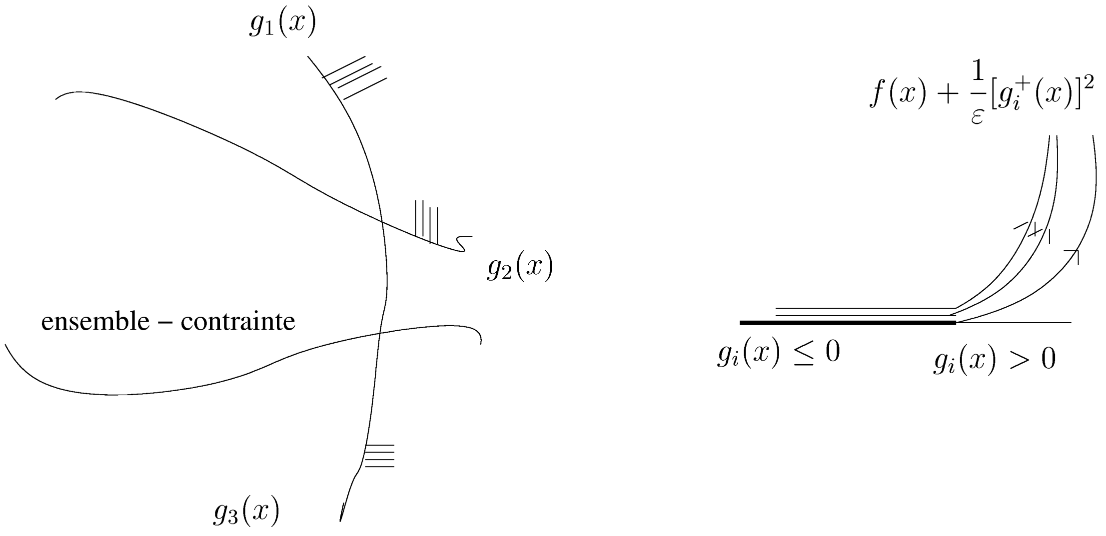


FIG. 7 –

En ajoutant à $f(x)$ des termes arrivant "abruptement" sur le bord de la contrainte $g_i(x) \leq 0$ qu'ils sont supposés pénaliser, comme $rg_i^+(x)$, on peut espérer que pour $r > 0$ assez grand (mais fixé), une solution du problème pénalisé donne directement une solution du problème original. C'est l'objectif de la *pénalisation exacte*, point non développé ici.

L'*intériorisation* (par barrières imposées), de quoi s'agit - il ?

Ici on modifie la fonction-objectif de $(\mathcal{P})$ à l'intérieur de l'ensemble-contrainte : la fonction ajoutée censée tenir compte de la contrainte $g_i(x) \leq 0$ "explose" en arrivant au bord de la contrainte (d'équation $g_i(x) = 0$). Un exemple typique en est $\log\left(-\dfrac{1}{g_i(x)}\right)$. Ainsi, dans une méthode itérative qui s'appuirait sur cette approche, la suite (x_k) des points engendrés reste dans l'ensemble-contrainte : $\log\left(-\dfrac{1}{g_i(x)}\right)$ joue le rôle de barrière et empêche x_k de sortir. Dans l'approche par intériorisation, on substitue à $(\mathcal{P})$ une suite de problèmes sans contraintes du type que voici (par exemple) :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser } \left\{ f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \log\left(-\frac{1}{g_i(x)}\right) \right\} \\ x \in \mathcal{O} := \{x \mid g_1(x) < 0,\ g_2(x) < 0, \ldots, g_m(x) < 0\}. \end{cases}$$

Comme pour la pénalisation, $\varepsilon \to 0$, et on espère qu'une solution $\bar{x}_\varepsilon$ de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ converge vers une solution de $(\mathcal{P})$, "par l'intérieur" de l'ensemble-contrainte cette fois (car, habituellement, les solutions de $(\mathcal{P})$ se trouvent sur le bord de l'ensemble-contrainte). Voilà l'idée de l'intériorisation de $(\mathcal{P})$ à l'aide de fonctions-barrières.

Pour des raisons variées comme celle d'un mauvais conditionnement quand $\varepsilon \to 0$, les méthodes comme celles de pénalisation extérieure furent pratiquement abandonnées vers le milieu des années 70. Le coup de tonnerre de 1985 avec l'arrivée de la méthode de N. KARMARKAR (en Programmation linéaire) allait relancer le débat, sans qu'on ait perçu au départ le lien avec une approche par intériorisation. C'était le début de ce que d'aucuns ([43]) ont appelé *la révolution*

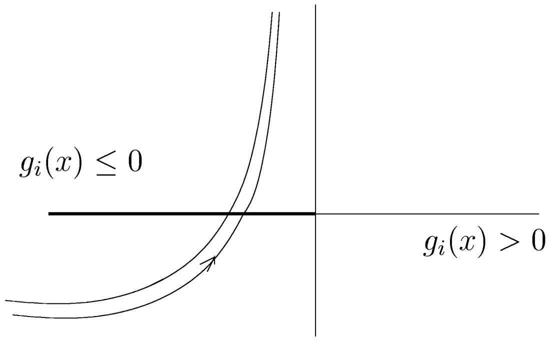


FIG. 8 –

des points intérieurs. On s'est rendu compte plus tard de l'équivalence formelle de la méthode de KARMARKAR avec une méthode classique d'intériorisation par barrière logarithmique appliquée dans un contexte de Programmation linéaire. Les avancées qui ont accompagné la révolution des points intérieurs peuvent être répertoriées dans les points suivants :

- la théorie de la complexité (initialement, les algorithmes à la KARMARKAR était sources d'algorithmes "polynomiaux" en Programmation linéaire),

- une meilleure compréhension des méthodes d'intériorisation via des fonctions-barrières (il s'agit cette fois de problèmes d'optimisation non-linéaires),

- une délimitation plus nette des classes de problèmes résolubles (par exemple, essoufflement des méthodes de points intérieurs dans le contexte non-linéaire au-delà de quelques centaines de variables, bien en-deçà des millions de variables traités dans le cas linéaire).

Notons aussi une conséquence inattendue : le lien plus grand qui s'est établi entre le monde (un peu à part auparavant) de la Programmation linéaire et celui de l'Optimisation non-linéaire. Un leitmotiv qui résumerait la philosophie des méthodes de points intérieurs serait celui qui consiste à dire : essayons de suivre au mieux le chemin $\varepsilon > 0 \mapsto \bar{x}_\varepsilon$ des solutions des versions intériorisées $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ du problème original $(\mathcal{P})$.

Dans la multitude des publications paraissant sur ce sujet, signalons [1, 15, 34] pour avoir une idée du bouillonnement des recherches en cours, et [44] pour un réel effort de présentation pédagogique.

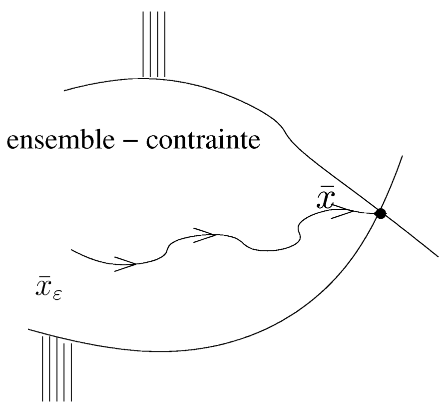


FIG. 9 –

2.4 L'Optimisation globale

On regroupe sous le vocable d'optimisation globale les questions relatives aux problèmes suivants :

(i) Trouver la borne inférieure de la fonction-objectif f sur l'ensemble - contrainte C (*tout entier*) ;

(ii) Trouver $\bar{x} \in C$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ *pour tout* $x \in C$.

C'est le *vrai* problème d'optimisation. L'optimisation dite locale a la même problématique, mais comme on l'a évoqué plus haut, elle doit se contenter en fin de compte de repérer, caractériser, approcher numériquement, etc. des éléments $\bar{x} \in C$ vérifiant $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pour tout $x \in C$ dans un voisinage de $\bar{x}$.

Optimiser globalement : *pourquoi* ? Plusieurs raisons à sa plus grande visibilité actuelle :

- des demandes plus précises et plus pressantes de la part des utilisateurs,

- des contributions (théoriques) plus pertinentes apportées au sujet par les mathématiciens,

- le développement de la puissance du calcul (ce qui était inimaginable il y a encore quelques années peut être envisagé aujourd'hui, vrai ici comme ailleurs).

L'optimisation globale, *ça intéresse qui* ?

- des mathématiciens travaillant en Optimisation (certes le sujet est difficile, mais ...) : la curiosité, le désir de produire et faire avancer les connaissances, sont des motivations de chercher ici aussi,

- l'utilisateur - demandeur : pas satisfait du résultat produit et qu'on lui a rendu (via l'optimisation locale par exemple), qui "sent" plusieurs minimiseurs locaux dans son problème, dont l'objectif n'est pas forcément d'appréhender un minimum global mais d'*améliorer* une situation déjà acquise.

Optimisation globale : *type de résultats obtenus.*

- Des "certificats d'optimalité globale" dans des problèmes d'optimisation spécialement structurés (certificats complétant les conditions du type KKT, mais pas toujours).

- Une algorithmique foisonnante, très *différente* de celle qu'on peut voir en optimisation locale (à laquelle les Sciences de l'ingénieur ont d'ailleurs beaucoup contribué). Elle repose sur une multitude d'idées (parfois très ingénieuses) de nature et origine très diverses (analogie avec des processus de la Physique, des comportements observés dans la nature, etc.). Une *règle d'or* dans ce domaine qui sécrète tout de même pas mal de déchets : il faut intégrer à la méthode de résolution préconisée la connaissance propre du domaine d'applications et la structure particulière du problème d'optimisation traité.

Quelques documents (et livres) de synthèse du sujet ont été confectionnés. On dispose également de batterie de problèmes tests, [14] en est un exemple récent. Pour des tests numériques de comparaison de codes publics disponibles, on renvoie à [31]. Enfin, un journal, crée en 1992, est consacré pour l'essentiel à ce domaine : *Journal of Global Optimization*, Kluwer.

2.5 L'Optimisation sous contraintes de semidéfinie positivité

C'est certainement l'un des sujets les plus "chauds" de la recherche en Optimisation ces dix dernières années. En anglais, SDP est une abréviation de *semidefinite programming*, que nous avons traduit en français en *optimisation sous contraintes de semidéfinie positivité* (conservant ainsi le sigle SDP). De quoi s'agit - il ? C'est une sorte d'optimisation à données linéaires (Programmation linéaire) sur l'espace $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles de taille n. Si dans $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire usuel est

$$x = (x_1, \ldots, x_n)\ ,\ y = (y_1, \ldots, y_n) \mapsto \ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \text{(ou } x^T y\text{)}$$

celui de $S_n(\mathbb{R})$ est

$$X = [x_{ij}]\ ,\ Y = [y_{ij}] \mapsto \ \langle\langle X, Y \rangle\rangle = \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}, = \text{trace de } (XY) \quad \text{(noté aussi } X.Y\text{)}.$$

Le *format type d'un problème d'optimisation SDP* est comme suit :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser } f(X) = \langle\langle C, X \rangle\rangle \\ \text{sous les contraintes} \\ \langle\langle A_i, X \rangle\rangle = b_i, \ \text{pour } i = 1, \ldots, m \\ \quad X \succcurlyeq 0, \end{cases}$$

où $C,\ A_1, \ldots, A_m \in S_n(\mathbb{R})$ et $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$.
Bien que la formulation s'apparente beaucoup à celle d'un programme linéaire (posé dans $\mathbb{R}^n$), cf. § 2.1, il faut noter le rôle très particulier que joue la contrainte "$X \succcurlyeq 0$" (à l'origine du vocable utilisé), très différente à gérer de "$x \geq 0$ dans $\mathbb{R}^n$". La situation n'est plus "convexe polyédrale" ici mais bien "convexe non-linéaire". Un certain nombre de problèmes dans les systèmes d'ingénierie se formulent en questions d'optimisation SDP ([41, 18, 33]).

Que peut-on dire de l'Optimisation SDP ?

- Qu'on dispose d'une bonne théorie (pour ce qui concerne les conditions d'optimalité, la manière de dualiser les problèmes, etc.). A ce sujet observons que ce fut le lieu privilégié de la résurgence de l'Analyse et optimisation convexes (une connaissance du linéaire - polyédral ne suffit pas) ; un cours comme celui de [8] en est la parfaite illustration.

- C'est un champ d'applications particulièrement approprié des méthodes de points intérieurs (cf. § 2.3) ; ces dernières permettent de résoudre des problèmes d'optimisation SDP en des temps "polynomiaux". Une manière en effet de "tuer" la contrainte dure $X \succcurlyeq 0$ dans $(\mathcal{P})$ est de faire appel à la fonction - barrière $\log(\det X^{-1})$ $(= -\log(\det X))$, et de remplacer $(\mathcal{P})$ par la famille

$(\mathcal{P}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ que voici :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser } \{f_\varepsilon(X) = \langle\langle C, X\rangle\rangle + \varepsilon \log(\det X^{-1})\} \\ \text{sous les contraintes} \\ \langle\langle A_i, X\rangle\rangle = b_i, \text{ pour } i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

On comprend que lorsque X approche la frontière de l'ensemble-contrainte "$X \succcurlyeq 0$" par son intérieur, $f_\varepsilon(X)$ "explose" (i.e. tend vers $+\infty$). Le choix de log(det) comme fonction - barrière plutôt qu'une autre n'est pas innocent ; il est dû à des propriétés particulières que possède cette fonction et sur lesquelles nous passons.

Comme références sélectionnées et récentes, nous proposons :

- [41] qui reste un des meilleurs articles - revues sur le sujet,
- le recueil [18] qui fait vraiment l'essentiel de l'état de l'art,
- l'article [34] et le cours [33], cette dernière référence contenant de plus une liste de codes de résolution disponibles.

Un choix d'applications de l'Optimisation SDP ?

Nous retenons deux domaines d'applications majeurs :

- *La théorie des systèmes et leur contrôle* (ou *Automatique*). La raison en est que l'analyse de certains systèmes d'ingénierie et les questions posées à l'occasion de leur contrôle conduisent à des *inégalités matricielles linéaires* (Linear Matrix Inequalities) qui peuvent être reformulées en problèmes d'optimisation SDP. Cette partie de l'Automatique a d'ailleurs beaucoup interagi avec l'Optimisation ces dernières années, et continue à le faire. Une bonne référence à cet égard est [7], document très prisé y compris chez les automaticiens.
- *L'Optimisation combinatoire*. Que ce champ d'applications apparaisse ici est beaucoup plus surprenant ...Considérons par exemple un problème d'optimisation combinatoire formulé comme suit :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) = \langle Cx, x\rangle \\ \text{sous les contraintes} \\ \langle A_i x, x\rangle = b_i, \text{ pour } i = 1, \ldots, m, \\ x_j \in \{-1, +1\} \text{ pour } j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

où $C,\ A_1, \ldots, A_m \in S_n(\mathbb{R})$ et $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}^n$.

La contrainte "dure" est ici celle qui impose aux coordonnées x_i de x d'être ± 1. Les problèmes tels que $(\mathcal{P})$ sont connus comme étant presque toujours "NP - difficiles" (qualificatif dans la gradation de la complexité des problèmes). Alors, que fait-on ? On "relâche" certaines contraintes, ou on "élargit" l'espace des variables admissibles, en mathématiques on dirait "on relaxe". On part pour cela des observations simples suivantes : si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la matrice $X = xx^T = [x_i x_j]$ est symétrique semidéfinie positive et de rang 1 (si $x \neq 0$) ; les termes diagonaux X_{ii} de X sont x_i^2, qui doivent être égaux à 1 (puisque $x_i = \pm 1$) ; par ailleurs les termes quadratiques en x tels que $\langle Cx, x\rangle$ deviennent linéaires en X puisque $\langle Cx, x\rangle = \langle\langle C, X\rangle\rangle$. Bref, on peut proposer une version relaxée de $(\mathcal{P})$ sous la forme suivante :

$$(\mathcal{P}_{relax}) \qquad \begin{cases} \text{Minimiser } F(X) = \langle\langle C, X\rangle\rangle \\ \text{sous les contraintes} \\ \langle\langle A_i, X\rangle\rangle = b_i, \text{ pour } i = 1, \ldots, m, \\ X_{ii} = 1 \text{ pour } i = 1, \ldots, n, \\ X \succcurlyeq 0. \end{cases}$$

On reconnaît un problème d'optimisation SDP, qui n'est toutefois pas équivalent à $(\mathcal{P})$ puisque la contrainte "X doit être de rang 1" ne figure plus. $(\mathcal{P}_{relax})$ est moins contraint, plus facile à résoudre, plus intéressant donc...à condition de savoir combien on a perdu en passant de $(\mathcal{P})$ à $(\mathcal{P}_{relax})$. On a toujours $\text{Min}(\mathcal{P}_{relax}) \leq \text{Min}(\mathcal{P})$, mais pour des problèmes d'optimisation combinatoire du type de ceux évoqués dans ce paragraphe, il a été prouvé par GOEMANS et WILLIAMSON en 1995 que $\text{Min}(\mathcal{P}) \leq 0,87856 \times \text{Min}(\mathcal{P}_{relax})$, c'est-à-dire que la valeur optimale dans le "vrai problème difficile" $(\mathcal{P})$ pouvait être approchée à 14 % près par la valeur optimale dans un "problème relaxé facile à résoudre". D'autre types de relaxations de $(\mathcal{P})$, conduisant à des problèmes d'optimisation SDP, font l'objet de recherches actuelles.

3 En guise de conclusion

Dans ce choix, forcément quelque part subjectif, de thèmes de recherche qui ont marqué le Calcul variationnel et l'Optimisation ces dernières années, d'autres auraient pu être cités tels :

- les problèmes d'optimisation spécialement structurés, comme ceux où toutes les données sont quadratiques,
- les problèmes de grande taille et leur résolution par les méthodes dites de "régions de confiance",
- les problèmes à variables mixtes (entières / continues) si fréquents dans les applications,
- etc.

Il n'empêche que l'Optimisation, discipline jeune, n'a pas encore trouvé toute sa place dans les applications d'ingénierie, au même titre que d'autres domaines plus anciens de l'Analyse appliquée ou numérique.

Références

[1] K. ANSTREICHER (Editor), Interior point methods in theory and practice, Special issue of Mathematical Programming Series B, 1997.

[2] J. T. BETTS, *A survey of numerical methods for trajectory optimization*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 21, no. 2, 193-207, 1998.

[3] J. T. BETTS, Practical methods for optimal control using nonlinear programming, Advances in Design and Control series, SIAM Publications, 2001.

[4] V. G. BOLTYANSKI, *The maximum principle - How it came to be*? Report no. 526, Mathematisches Institut Technische Universität München, 1994.

[5] J. F. BONNANS, *Numerical methods for the optimal control of ordinary differential equations*, Lecture notes from the course "Numerical methods for nonlinear problems in optimization and control", Cortona, 2001.

[6] J. F. BONNANS, J. C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL et C. SAGASTIZÁBAL, Optimisation numérique. Aspects théoriques et pratiques, no. 27 de la Série Mathématiques et Applications, SMAI & Springer, 1997.

[7] S. BOYD, L. ELGHAOUI, E. FERON and V. BALAKRISHNAN, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM Publications, 1994.

[8] S. BOYD and L. VANDENBERGHE, Introduction to convex optimization with engineering applications, Cours de l'Electrical Engineering Department de Stanford University ; livre en préparation.

[9] F. BROCK, V. FERONE and B. KAWOHL, *A symmetry problem in the calculus of variations*, Calculus of Variations, 4, 593-599, 1996.

[10] A. E. BRYSON Jr. and Y.-C. HO, Applied optimal control. Revised printing by Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1975.

[11] A. E. BRYSON Jr., *Optimal control - 1950 to 1985*, IEEE Control Systems Magazine, 26-33, 1996.

[12] G. BUTTAZZO and B. KAWOHL, *On Newton's problem of minimal resistance*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 15, 7-12, 1993.

[13] I. EKELAND, Le meilleur des mondes possibles. Editions du Seuil, 2000.

[14] C. A. FLOUDAS, P. M. PARDALOS et al., Handbook of test problems in local and global optimization, Nonconvex optimization and its applications series, no. 033, KLuwer, 1999.

[15] R. FREUND and S. MIZUNO, *Interior point methods : current status and future directions*, Optima, 1-9, 1996.

[16] R. V. GAMKRELIDZE, *Discovery of the maximum principle*, Journal of Dynamical and control systems, no. 4, 437-451, 1999.

[17] P. GUASONI, *Problemi di ottimizzazione di forma su classi di insiemi convessi.* Tesi di Laurea, Pisa, 1996.

[18] Handbook of semidefinite programming, H. Wolkowicz, R. Saigal and L. Vandenberghe, editors Kluwer, 2000.

[19] S. HILDEBRANDT and A. TROMBA, The parsimonious universe. Shape and form in the natural world. Springer-Verlag, 1996.

[20] L. M. HOCKING, *Optimal control. An introduction to the theory with applications.* Oxford University Press, reprinted with corrections, 2001.

[21] J. -B. HIRIART-URRUTY, L'Optimisation, Collection "Que sais-je ?" no. 3184, Presses Universitaires de France, 1996.

[22] M. L. KAMIEN and N. L. SCHWARTZ, Dynamic optimization. The calculus of variations and optimal control in economics and management, North-Holland, 1991.

[23] C. T. KELLEY, Iterative methods for Optimization, Frontiers in Applied Mathematics series, SIAM Publications, 1999.

[24] T. LACHAND-ROBERT, Minimisation sous contraintes de convexité ou globales. Applications au problème de résistance minimale de Newton. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Paris VI, 2000.

[25] R. M. LEWIS, V. TORCZON, M. TROSSET, *Direct search methods : then and now,* in Numerical analysis 2000, Vol. 4 "Optimization and nonlinear equations", Watson, Bartholomew-Biggs and Ford, editors, North-Holland, 191-207, 2001.

[26] J.-L. LIONS, *De R. Descartes y B. Pascal al ingeniero del futuro*, Exposé à Santiago du Chili, 1998.

[27] Mathématiques spatiales pour la préparation et la réalisation de l'exploitation des satellites, CEPADUES-Editions, 1984.

[28] Mécanique spatiale pour les satellites géostationnaires, CEPADUES-Editions, 1986.

[29] Mécanique spatiale, Tomes I et II, CEPADUES-Editions, 1995.

[30] M. MONGEAU, Cours de Maîtrise d'Ingénierie Mathématique, Université Paul Sabatier, 1999-2000.

[31] M. MONGEAU, H. KARSENTY, V. ROUZÉ et J.-B. HIRIART-URRUTY *Comparison of public-domain software for black-box global optimization*, Optimization Methods and Software. Vol. 13, 203-226, 2000.

[32] H. J. PESCH, *A practical guide to the solution of real-life optimal control problems*, Control and cybernetics 23, 7-60, 1994.

[33] F. A. POTRA, *Semidefinite programming and applications*, Lecture notes from the course "Numerical methods for nonlinear problems in optimization and control", Cortona, 2001.

[34] F. A. POTRA and S. J. WRIGHT, *Interior point methods*, in Numerical analysis 2000, Vol. 4 "Optimization and nonlinear equations", Watson, Bartholomew-Biggs and Ford, editors, North-Holland, 281-302, 2001.

[35] M. J. D. POWELL, *Direct search algorithms for optimization calculations,* Acta Numerica, 287-336, 1998.

[36] A. SCHEUER, *Amélioration de la conduite de robots mobiles*, Rapport de recherche INRIA Lorraine no. 3994, 2000.

[37] P. SOUÈRES, Contribution à la commande des robots mobiles. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paul Sabatier de Toulouse, 2001.

[38] H. J. SUSSMANN and J. C. WILLEMS, *300 years of optimal control : from the brachystochrone to the maximum principle*, IEEE Control Systems Magazine, 32-44, 1997.

[39] G. W. SWAN, *General applications of optimal control theory in cancer chemotherapy*, IMA Journal of Mathematics Applied in Medecine & Biology 5, 303-316, 1988.

[40] G. W. SWAN, *Role of optimal control theory in cancer chemotherapy*, Mathematical Biosciences 101, 237-294, 1990.

[41] L. VANDENBERGHE and S. BOYD, *Semidefinite programming*, SIAM Review 38, 49-96, 1996.

[42] M. H. WRIGHT, *Direct search methods : once scorned, now respectable*, in Numerical Analysis 1995 (D. F. Griffiths and G. A. Watson, eds), Addison Wesly, 191-208, 1996.

[43] M. H. WRIGHT, *What, if anything, is new in Optimization ?*, Technical report 00-4-08, Bell laboratories at Murray Hill, 2000.

[44] S.J. WRIGHT, Primal-dual interior point methods, SIAM Publications, 1996.

