

**Titre (title) : Trajectoires en consommation minimale pour le déploiement d'une formation de satellites - Techniques de commande optimale** (*Minimum-fuel deployment for formation flying of satellites - An optimal control approach*)<sup>1</sup>

**Auteurs (Authors) : Jean-Baptiste THEVENET et Richard EPENYOY**  
du Centre Spatial de Toulouse

**Mots clés (Keywords) : Formation de satellites** *Satellite formation flying*, **Commande optimale "bang-off-bang"** *"Bang-off-bang" optimal control*, **Techniques de lissage** *Smoothing techniques*, **orbites basses** *Low Earth Orbits*

**Résumé :**

Nous nous intéressons ici au déploiement en consommation minimale d'une formation de satellites. Le problème est modélisé comme un problème de commande optimale et résolu par une technique de "continuation-lissage". L'application considérée est un cas de déploiement en orbite basse à quatre satellites pour lequel la méthode se révèle très efficace. Toutefois, cette dernière est plus générale et capable de traiter une classe importante de problèmes de déploiement ou de reconfiguration.

**Abstract:**

This work focuses on the problem of fuel-optimal deployment for satellite formation flying. It is first cast as an optimal control problem and then successfully handled through a "continuation-smoothing" technique. Numerical examples concerning Low Earth Orbits are examined in the sequel, though our method aims at solving a whole class of deployment / reconfiguration problems.

---

<sup>1</sup>Travaux co-financés par (*This work is co-funded by*) Alcatel Alenia Space

# Sommaire

<b>Glossaire</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2 Position du problème</b>	<b>7</b>
2.1 Formulation générale . . . . .	7
2.2 Conditions finales . . . . .	8
2.3 Commandes optimales “bang-off-bang” . . . . .	10
2.4 Principales difficultés . . . . .	12
<b>3 Méthode de continuation-lissage</b>	<b>13</b>
3.1 Principe . . . . .	13
3.2 Choix des fonctions de pénalité / barrière . . . . .	14
3.3 Implémentation . . . . .	15
3.3.1 Solution estimée et réajustement du paramètre de lissage . . . . .	15
3.3.2 Initialisation : homotopie sur les conditions finales . . . . .	16
<b>4 Fonctionnalités additionnelles</b>	<b>18</b>
4.1 Technique de globalisation . . . . .	18
4.2 Méthode d’équilibrage des consommations . . . . .	19
4.2.1 Modélisation . . . . .	19
4.2.2 Prise en compte de la contrainte . . . . .	20
4.2.3 Optimalité des solutions équilibrées . . . . .	21
<b>5 Tests numériques</b>	<b>22</b>
5.1 Données du problème de déploiement . . . . .	22
5.1.1 Paramètres communs aux quatre satellites . . . . .	22
5.1.2 Paramètres spécifiques . . . . .	23
5.2 Déploiement sur une durée de sept jours . . . . .	25
5.2.1 Solution “globale” . . . . .	26
5.2.2 Exemple de stratégie alternative . . . . .	28
5.3 Évolution de la stratégie globale lorsque $t_f$ varie . . . . .	30
5.4 Équilibrage des consommations . . . . .	34
<b>6 Conclusion</b>	<b>36</b>
<b>Références</b>	<b>37</b>
<b>A Stratégie exclusivement tangentielle</b>	<b>39</b>

# Glossaire

LEO	Low Earth Orbit.
HEO	Highly Elliptical Orbit.
TPBVP	Two-Point Boundary Value Problem, problème d'équations différentielles aux deux bouts.
PMP	Principe du Maximum de Pontryagin.

# 1 Introduction

De nombreux projets spatiaux envisagent aujourd’hui d’utiliser des *formations* de micro-satellites à la place d’un unique satellite de grande taille. Les raisons sont multiples : diminution des coûts, augmentation de la performance des instruments dans le cas des missions d’interférométrie, ... Ces missions posent de nouveaux problèmes de mécanique orbitale, dont celui qui nous intéresse ici, le *déploiement* de la formation. Cette phase consiste à placer la formation de satellites dans sa configuration opérationnelle, à partir de conditions d’injection données par le lanceur. Nous considérons dans la suite une application en orbite basse, pour laquelle le modèle dynamique utilisé inclut le terme en  $J_2$  du potentiel terrestre. Celui-ci est en effet prépondérant pour ce type d’orbite et sa prise en compte conditionne fortement les stratégies de manœuvres. Les autres forces seront négligées. Nous chercherons plus précisément les trajectoires de déploiement qui minimisent la consommation totale en ergols de l’ensemble des satellites. Soulignons toutefois dès à présent le caractère générique de la méthode proposée, dont les caractéristiques ne dépendent pas des modèles utilisés, ni du type d’orbite considéré. Il est ainsi tout à fait envisageable de viser des orbites elliptiques de type HEO par exemple, ou encore de traiter des problèmes de nature différente, tel celui de la reconfiguration d’une formation : lorsque les objectifs de la mission sont modifiés, ou encore quand un ou plusieurs satellites deviennent inutilisables, il est nécessaire de calculer les manœuvres à effectuer pour obtenir une nouvelle configuration opérationnelle. Il existe un nombre important de travaux portant sur la reconfiguration, le déploiement ou encore le maintien à poste d’une formation. Les problèmes abordés et les méthodes proposées sont multiples, et nous nous bornons ici à donner quelques références sur le sujet. Dans ce but, les différents travaux seront classés suivant les modèles utilisés pour décrire le mouvement des satellites.

Plusieurs auteurs utilisent tout d’abord des équations linéarisées (équations de Hill Clohessy-Wiltshire [10, 6]), ou linéaires temps-variant (équations de Lawden [14]), pour décrire le mouvement relatif des satellites de la formation. Ces équations sont valides dans le cas où les distances entre satellites sont faibles. Dans ce cadre, il est parfois possible de fournir une solution analytique aux problèmes de maintien à poste et de déploiement [12, 22]. Cependant, il est nécessaire pour cela d’opérer certaines simplifications : choix particulier du critère (minimisation de l’énergie et non de la consommation), structure temporelle et / ou directions de la poussée connues à l’avance. Dans le cas général, la formalisation mathématique du déploiement en consommation minimale conduit à un problème de commande optimale, c’est à dire un problème d’optimisation de dimension infinie. Même avec un modèle dynamique linéaire, l’approche adéquate pour obtenir des stratégies de manœuvres optimales consiste à mettre en œuvre des méthodes numériques. Les plus utilisées, les méthodes “directes”, sont basées sur une discrétisation de l’horizon temporel alloué au déploiement. Les valeurs des commandes optimales à chaque instant sont ensuite calculées à l’aide de méthodes d’optimisation numérique déterministes [24, 16, 11], ou heuristiques (algorithmes génétiques, optimisation multi-agent,

planification [27, 4, 8]). Ces approches sont efficaces et capables en outre de traiter de manière aisée d'éventuelles contraintes sur l'état du type "évitement de collision" [23, 13, 16, 11]. Dans [20], les auteurs proposent notamment une approche de type "Mixed-Integer Linear Programming" pour résoudre le problème. Malheureusement le champ d'application de toutes ces méthodes est restreint à des missions pour lesquelles la configuration de la formation est très spécifique. Par ailleurs, la validité de l'approximation linéaire ne tient plus dans le cas de certaines applications concrètes (effet important du terme en  $J_2$ , durées de manœuvres et surtout distances entre satellites importantes). Il nous semble donc essentiel d'utiliser des méthodes plus générales capables de traiter des modèles non linéaires.

En ce qui concerne le maintien à poste, [26, 21] donnent, pour des modèles non linéaires, des conditions suffisantes permettant d'obtenir des orbites " $J_2$  invariantes", trajectoires relatives non contrôlées ne dérivant pas dans le temps. Ces résultats présentent un intérêt indéniable pour le *design* de la formation ou la synthèse de lois de commande en boucle fermée (problème non abordé ici), mais ne répondent pas aux problèmes de reconfiguration et de déploiement.

Pour ces problèmes qui nous occupent, de manière analogue au cas linéaire, il est possible de discrétiser le problème de commande optimale impliquant des modèles dynamiques non linéaires (utilisation des équations de Gauss), puis d'utiliser une méthode de programmation dynamique pour la résolution finale (voir par exemple [17]). Cependant, une fois encore, la mise en œuvre d'une telle méthode dans le présent contexte (déploiement sur plusieurs semaines en orbite basse avec effet du  $J_2$ ) nous semble peu réaliste en raison de la dimension trop élevée du problème d'optimisation résultant. Il est alors naturel de se tourner vers des techniques de résolution alternatives.

Certains auteurs [9] proposent de traiter le problème de commande optimale par une approche basée sur la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Nous opterons ici pour une troisième méthode, dite "indirecte", utilisant le *Principe du Maximum de Pontryagin* [18]. Celui-ci établit les conditions d'optimalité du problème, qui conduisent à des équations résolues numériquement. Cette résolution consiste à annuler une fonction spécifique, dite "fonction de tir". La démarche que nous proposons adapte en particulier ce principe au problème du déploiement. Nous ne traiterons pas ici le problème des collisions entre les satellites, car les stratégies de déploiement obtenues lors des tests numériques, pour notre application, n'en engendrent pas. Cependant, dans d'autres contextes, il est probable que notre technique génère des trajectoires pour lesquelles un risque de ce type existe. Nous ne sommes actuellement pas en mesure de proposer une solution efficace pour gérer ce problème dans le cas des méthodes indirectes. La prise en compte de l'évitement des collisions revient en effet à ajouter au problème des contraintes sur l'état, non convexes, qui doivent être vérifiées à chaque instant, et qui sont donc particulièrement complexes à gérer dans le cadre du PMP. Certains auteurs proposent dans la littérature de pallier cette difficulté en utilisant une méthode de pénalisation extérieure. Celle-ci vise à forcer la satisfaction des contraintes en fin d'algorithme (voir par exemple [25]). En rai-

son des problèmes numériques (mauvais conditionnement) liés à cette approche, il paraît plus intéressant d'utiliser une méthode basée sur l'utilisation de potentiels artificiels répulsifs, dont le lecteur trouvera des exemples dans [15]. Cependant, il semble difficile d'établir des garanties d'optimalité dans ce cas. Quoi qu'il en soit, des développements algorithmiques et numériques importants restent à réaliser dans ce domaine.

Hormis la gestion des collisions, les difficultés de résolution du problème sont nombreuses. Certaines sont liées à sa structure, d'autres découlent de la méthode choisie. Ainsi, en premier lieu, le problème étant non convexe, il peut admettre plusieurs minima locaux correspondant à des stratégies différentes de déploiement. Il est essentiel de pouvoir isoler un nombre important de ces solutions pour les comparer et espérer déceler l'optimum global du problème.

Par ailleurs, le modèle dynamique utilisé (dans le cadre d'applications LEO) inclut le terme en  $J_2$  du potentiel terrestre, source d'oscillations de courte période sur les paramètres orbitaux. Nous mentionnions plus haut "l'explosion" du nombre résultant de variables pour les méthodes directes. De même, pour les méthodes indirectes, les temps de calculs et erreurs numériques augmentent singulièrement avec le temps d'intégration, en raison de ce terme en  $J_2$ .

Ensuite, les commandes optimales associées sont de type "tout ou rien" (*bang-off-bang* en anglais). Leur caractère non lisse est transmis à la fonction de tir et la résolution du problème aux deux bouts par une méthode locale de type Newton s'avère alors problématique, à moins de disposer d'une très bonne approximation des solutions. Ce n'est malheureusement pas le cas en pratique, et nous serons donc amenés à développer une méthode de "continuation-lissage" pour le cas multi-satellite, à partir des travaux réalisés dans le cas mono-satellite [1, 2].

La dernière difficulté majeure provient des conditions finales du problème. Ces relations, qui traduisent principalement la géométrie de la formation en fin de déploiement, induisent un couplage entre les paramètres orbitaux des satellites. Par conséquent, le problème de l'optimisation du déploiement doit être traité globalement et ne se réduit pas à  $n$  problèmes d'optimisation indépendants (un par satellite).

En marge de l'approche principale, nous proposerons une méthode visant à assurer un certain équilibrage des consommations entre les satellites. Nous verrons notamment qu'une modélisation possible consiste à ajouter au problème une contrainte portant sur les masses finales des satellites.

La première partie du présent document expose en détail le problème à traiter et les difficultés qu'il soulève. Nous présentons ensuite les techniques développées et leur implémentation. La partie suivante est consacrée aux fonctionnalités supplémentaires de globalisation et d'équilibrage des consommations. Enfin, cette note se conclut par l'exposé des résultats numériques obtenus sur le cas-test décrit ci-dessous.

## 2 Position du problème

### 2.1 Formulation générale

Le problème de déploiement envisagé ici est le suivant : considérons quatre satellites injectés par le lanceur sur une orbite de transfert, nous cherchons à satisfaire des critères de configuration à un instant final donné. Plus précisément, nous visons des orbites LEO et les écarts relatifs entre certains paramètres des satellites doivent être égaux à certaines valeurs cibles. Nous désirons alors déterminer la *stratégie de manœuvres* à appliquer à tous les satellites de manière à *minimiser la somme des consommations* en ergols.

Nous considérons donc une formation de  $n$  satellites ( $n = 4$ ), et nous notons  $S_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) le  $j^{\text{ème}}$  satellite de la formation. Le vecteur d'état  $x_j$  des paramètres orbitaux équinoxiaux (relativement à un référentiel inertiel) osculateurs, associé au satellite  $S_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), est défini par :

$$x_j = \begin{pmatrix} a_j \\ e_{x,j} = e_j \cos(\omega_j + \Omega_j) \\ e_{y,j} = e_j \sin(\omega_j + \Omega_j) \\ h_{x,j} = \tan(i_j/2) \cos(\Omega_j) \\ h_{y,j} = \tan(i_j/2) \sin(\Omega_j) \\ L_j = \omega_j + \Omega_j + v_j \end{pmatrix}, \quad (1)$$

où  $(a_j, e_j, i_j, \omega_j, \Omega_j, v_j)$  désigne l'ensemble des paramètres Kepleriens osculateurs de  $S_j$ .

Nous utilisons les équations de Gauss associées aux paramètres (1) pour décrire le mouvement de  $S_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Ainsi, le problème à résoudre prend la forme d'un problème de commande optimale et s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(u_1, \dots, u_n) = -\sum_{j=1}^n m_j(t_f) \\ \dot{x}_j(t) = f(x_j(t)) + F_{max} g(x_j(t)) \frac{u_j(t)}{m_j(t)} \\ \dot{m}_j(t) = -F_{max} \frac{\|u_j(t)\|}{g_0 I_{sp}} \\ \|u_j(t)\| \leq 1 \quad t \in [t_0, t_f] \\ x_j(t_0) = x_{j,0} \quad m_j(t_0) = m_0 \\ \psi_j(x_j(t_f)) = 0 \\ \phi(x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)) = 0 \end{array} \right., \quad (j = 1, \dots, n), \quad (2)$$

où  $m_j$  et  $u_j$  désignent respectivement la masse et la commande du satellite  $S_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Plus précisément,  $F_{max}$  étant le module maximum de poussée des moteurs dans (2),  $F_{max} u_j$  représente le vecteur poussée du moteur du satellite  $S_j$  exprimé dans le repère orbital local  $(T, N, W)$ .

Bien que, pour cette application, tous les satellites soient supposés équipés du même moteur (d'impulsion spécifique  $I_{sp}$ ) et disposent d'une masse d'ergols initiale identique  $m_0$ , ces conditions ne sont pas requise pour le bon fonctionnement de la méthode.

Par ailleurs,  $x_{j,0}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) dans (2), est le vecteur des paramètres orbitaux initiaux de  $S_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Les grandeurs  $g_0$ ,  $t_0$  et  $t_f$ , désignent respectivement l'accélération de la pesanteur au niveau de la mer, la date initiale et la date finale, qui doivent être toutes les deux fixées.

Notre application concerne des problèmes en orbite basse (LEO) pour lesquels le modèle dynamique utilisé, à travers les équations de Gauss dans (2), néglige le frottement atmosphérique, mais prend en compte l'accélération due au terme en  $J_2$  du potentiel terrestre. Ce point est important car les stratégies optimales de déploiement (cf. § 5) doivent pouvoir utiliser les effets de cette accélération, et notamment la dérive différentielle de certains paramètres orbitaux.

## 2.2 Conditions finales

Le problème (2) comporte des conditions finales notées :

$$\psi_j(x_j(t_f)) = 0, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (3)$$

$$\phi(x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)) = 0. \quad (4)$$

Dans le cas du déploiement d'une formation en orbite LEO, nous allons en effet imposer à l'instant final, la valeur des écarts de longitude vraie  $L$  et d'ascension droite du nœud ascendant  $\Omega$  entre certaines couples de satellites, ce qui conduit à (4). Les autres paramètres orbitaux seront fixés de manière explicite et indépendante d'un satellite à l'autre, ce qui conduit à (3). Notons que ces contraintes devraient porter en toute rigueur sur les paramètres moyens et non sur leurs valeurs osculatrices. Toutefois, cette approximation simplifie la mise en oeuvre de notre méthode et ne conduit pas à des différences significatives en terme de stratégies de déploiement.

**Remarque 2.1** *La terminologie "longitude vraie" pour désigner  $L = \Omega + \omega + v$ , où  $\omega$  et  $v$  désignent respectivement l'argument du périégée et l'anomalie vraie, peut sembler abusive lorsque l'inclinaison de l'orbite concernée n'est pas nulle. Toutefois, ne disposant pas de meilleure appellation, nous conserverons celle-ci dans la suite. Nous utiliserons par ailleurs le terme "argument de latitude vraie" pour désigner  $\alpha = \omega + v$ .*

Les conditions finales non couplantes du problème (2) vont s'écrire sous la forme suivante :

$$\psi_j(x_j(t_f)) = \begin{bmatrix} a_j(t_f) - a_{j,f} \\ e_{x,j}(t_f) - e_{x,j,f} \\ e_{y,j}(t_f) - e_{y,j,f} \\ h_{x,j}(t_f)^2 + h_{y,j}(t_f)^2 - \tan^2\left(\frac{i_{j,f}}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (j = 1, \dots, n), \quad (5)$$

où  $a_{j,f}$ ,  $e_{x,j,f}$ ,  $e_{y,j,f}$  et  $i_{j,f}$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), sont des constantes. Nous fixons donc, pour chaque satellite, les valeurs finales oscultrices du demi-grand axe, de l'excentricité, et de la quantité  $\omega + \Omega = L - v$ . De même, la valeur de l'inclinaison à  $t = t_f$  est spécifiée à l'aide de la dernière composante de  $\psi_j(x_j(t_f))$  dans (5) (voir les expressions (1) de  $h_{x,j}$  et  $h_{y,j}$ ). Cette valeur est en fait commune aux quatre satellites dans notre cas :  $i_{j,f} = i_f$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), où  $i_f$  est également une constante.

Intéressons nous maintenant à la contrainte additionnelle  $\phi$ , explicitement définie par :

$$\phi(x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)) = \begin{bmatrix} \phi^1(x_1(t_f), x_2(t_f)) \\ \vdots \\ \phi^{n-1}(x_{n-1}(t_f), x_n(t_f)) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Dans (6), chaque  $\phi^j$ , ( $j = 1, \dots, n-1$ ), est associé à un couple de satellites  $\{S_j, S_{j+1}\}$  et permet de spécifier, à la date finale  $t_f$ , et pour le couple correspondant, la valeur des écarts entre certains paramètres orbitaux. Plus précisément, pour  $j = 1, \dots, n-1$  :

$$\phi^j(x_j(t_f), x_{j+1}(t_f)) = \begin{bmatrix} h_{x,j}(t_f) h_{x,j+1}(t_f) + h_{y,j}(t_f) h_{y,j+1}(t_f) - \tan^2\left(\frac{i_f}{2}\right) \cos(\delta \Omega_{j,f}) \\ h_{x,j}(t_f) h_{y,j+1}(t_f) + h_{y,j}(t_f) h_{x,j+1}(t_f) - \tan^2\left(\frac{i_f}{2}\right) \sin(\delta \Omega_{j,f}) \\ \tan\left(\frac{L_{j+1}(t_f) - L_j(t_f)}{2}\right) - \tan\left(\frac{\delta L_{j,f}}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

où  $\delta \Omega_{j,f}$  est une constante représentant l'écart entre les ascensions droites du nœud ascendant de  $S_j$  et  $S_{j+1}$  à  $t = t_f$ . En effet, lorsque la relation  $\phi^j(x_j(t_f), x_{j+1}(t_f)) = 0$  est satisfaite, les deux premières équations impliquent que  $\Omega_{j+1}(t_f) - \Omega_j(t_f) = \delta \Omega_{j,f}$ . Pour s'en persuader, le lecteur pourra se référer de nouveau à (1).

**Remarque 2.2** Si deux satellites  $S_j$  et  $S_{j+1}$ ,  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , sont dans un même plan à  $t = t_f$ , nous aurons en particulier  $\delta \Omega_{j,f} = 0$ .

De façon similaire, la constante  $\delta L_{j,f}$  dans (7) est utilisée pour spécifier l'écart de longitude vraie au temps final, entre  $S_j$  et  $S_{j+1}$ . Notons que la composante correspondante de  $\phi^j(x_j(t_f), x_{j+1}(t_f))$  utilise la tangente de l'angle moitié. Cette formulation est équivalente à  $L_{j+1}(t_f) - L_j(t_f) = \delta L_{j,f} [2\pi]$ .

Soulignons enfin que la contrainte  $\phi(\cdot) = 0$  introduit au sein de (2) un couplage entre les variables d'état du problème. Par conséquent, il n'est pas possible de traiter ce problème de déploiement à  $n$  satellites comme la juxtaposition de  $n$  problèmes de rendez-vous indépendants.

### 2.3 Commandes optimales “bang-off-bang”

Nous nous proposons ici d'appliquer le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) [3, 5, 18], qui nous donne les conditions d'optimalité du problème (2). Pour ce faire, commençons par définir un certain nombre de notations.

Regroupons tout d'abord l'ensemble des variables d'état dans un vecteur d'état global  $y(t)$ , de dimension  $7n$ . En notant  $p_{x_j}(t)$  et  $p_{m_j}(t)$  les états adjoints respectivement associés à  $x_j(t)$  et  $m_j(t)$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), définissons de manière similaire le vecteur état adjoint,  $p_y(t)$ , de même dimension que  $y(t)$ . Enfin, rassemblons également les différentes commandes dans un vecteur  $u(t)$ , de taille  $3n$ . Nous avons :

$$y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ m_1(t) \\ \vdots \\ m_n(t) \end{pmatrix}, \quad p_y(t) = \begin{pmatrix} p_{x_1}(t) \\ \vdots \\ p_{x_n}(t) \\ p_{m_1}(t) \\ \vdots \\ p_{m_n}(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Formons à présent l'Hamiltonien du problème (2). Du fait de l'indépendance des dynamiques des satellites que nous mentionnions au paragraphe précédent, et de l'absence de terme intégral dans le critère, cet Hamiltonien s'écrit :

$$H(y(t), u(t), p(t)) = \sum_{j=1}^n H_j(x_j(t), m_j(t), u_j(t), p_{x_j}(t), p_{m_j}(t)),$$

avec, pour tout  $j = 1, \dots, n$  :

$$H_j(x_j(t), m_j(t), u_j(t), p_{x_j}(t), p_{m_j}(t)) = p_{x_j}(t)^T \left[ f(x_j(t)) + F_{max} g(x_j(t)) \frac{u_j(t)}{m_j(t)} \right] + p_{m_j}(t)^T \left[ -F_{max} \frac{\|u_j(t)\|}{g_0 I_{sp}} \right], \quad (8)$$

où dans toute la suite l'exposant  $T$  désigne l'opérateur de transposition.

La minimisation à  $t$  fixé de l'Hamiltonien  $H$  par rapport à  $u(t)$  est alors équivalente à la minimisation de chaque terme  $H_j(x_j(t), m_j(t), u_j(t), p_{x_j}(t), p_{m_j}(t))$  par rapport à  $u_j(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Les commandes optimales  $u_j^*$  ( $j = 1, \dots, n$ ) sont donc “indépendantes” d'un satellite à l'autre.

Dans la suite,  $j \in \{1, \dots, n\}$  est fixé. D'après [3, 5, 18], la commande optimale pour le satellite  $S_j$  est donnée par :

$$u_j^*(t) = \underset{\|w\| \leq 1}{\operatorname{argmin}} \left[ -\frac{p_{m_j}(t)}{g_0 I_{sp}} \|w\| + p_{x_j}(t)^T g(x_j(t)) \frac{w}{m_j(t)} \right], \quad t \in [t_0, t_1],$$

ce qui conduit à une commande optimale “bang-off-bang”. En effet, si  $g(x_j(t))^T p_{x_j}(t) \neq \mathbf{0}_{3,1}$ , nous pouvons utiliser l'inégalité de Cauchy-Swartz :

$$-\frac{p_{m_j}(t)}{g_0 I_{sp}} \|w\| + p_{x_j}(t)^T g(x_j(t)) \frac{w}{m_j(t)} \geq - \left( \frac{\|g(x_j(t))^T p_{x_j}(t)\|}{m_j(t)} + \frac{p_{m_j}(t)}{g_0 I_{sp}} \right) \|w\|, \quad \forall w \mid \|w\| \leq 1,$$

l'égalité étant satisfaite quand le vecteur  $w$  est colinéaire et de sens opposé au vecteur  $g(x_j(t))^T p_{x_j}(t)$ .

Ainsi, si  $\rho_j(t)$  désigne la fonction de “commutation”, définie par :

$$\rho_j(t) = F_{max} \left( \frac{\|g(x_j(t))^T p_{x_j}(t)\|}{m_j(t)} + \frac{p_{m_j}(t)}{g_0 I_{sp}} \right), \quad (9)$$

la commande optimale solution satisfait les relations suivantes :

– si  $g(x_j(t))^T p_{x_j}(t) \neq \mathbf{0}_{3,1}$ ,  $u_j^*(t)$  est donné par :

$$u_j^*(t) = -\beta_j(t) \frac{g(x_j(t))^T p_{x_j}(t)}{\|g(x_j(t))^T p_{x_j}(t)\|},$$

où  $\beta_j(t)$ , qui est la norme de  $u_j^*(t)$  est défini par :

$$\beta_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_j(t) < 0, \\ 1 & \text{si } \rho_j(t) > 0, \\ w \in [0, 1] & \text{si } \rho_j(t) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

– si  $g(x_j(t))^T p_{x_j}(t) = \mathbf{0}_{3,1}$ ,  $u_j^*(t)$  doit simplement vérifier :

$$\|u_j^*(t)\| = \beta_j(t).$$

**Remarque 2.3** La présence dans (9) du facteur  $F_{max}$  est inutile pour la définition de  $\beta_j(t)$  dans (10). En effet celle-ci ne dépend que du signe de  $\rho_j(t)$ . Cependant, ce choix nous permet de conserver une cohérence avec les notations utilisées dans la partie 3.

À chaque instant, la direction de poussée pour  $S_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) sera donc donnée par le vecteur  $-g(x_j(t))^T p_{x_j}(t)$  (sauf dans le cas particulier où  $g(x_j(t))^T p_{x_j}(t) = \mathbf{0}_{3,1}$ ), et le signe de la “fonction de commutation” déterminera si la poussée doit être maximale ou nulle. La relation (10) en

effet traduit le caractère “bang-off-bang” ou “tout ou rien” de la commande. Il faudra vérifier, lors de la résolution numérique, que  $g(x_j(t))^T p_{x_j}(t)$  ne s’annule qu’en des instants isolés. La commande sera alors toujours définie, c’est à dire qu’il n’y aura pas d’arc singulier [3, 5].

Le système différentiel donnant l’évolution au cours du temps de l’état adjoint  $p_y(\cdot)$  d’une part, et les conditions de transversalité en  $t_f$  reliant  $p_y(t_f)$  à  $t_f$  et  $y(t_f)$  d’autre part, sont obtenus en appliquant le PMP [3, 5, 18]. Ces conditions de transversalité, non détaillées ici, constituent la “**fonction de tir**”, notée  $\Phi(\cdot)$  dont l’inconnue est le vecteur  $z = p_y(t_0)$ . Il faut alors **résoudre un système d’équations** que nous écrivons sous la forme  $\Phi(z) = 0$ . Nous utilisons pour cela une implémentation dérivée de la méthode hybride de Powell [19], qui se comporte localement comme une méthode de Newton.

**Remarque 2.4** *Les conditions de transversalité s’appliquent en  $t_f$ , alors que le vecteur inconnu  $z$  contient des conditions initiales. C’est pourquoi le problème à résoudre est qualifié de **système différentiel aux deux bouts** ou *Two-Point Boundary Value Problem (TPBVP) en anglais.**

## 2.4 Principales difficultés

L’évaluation de la fonction de tir  $\Phi(\cdot)$  requiert l’intégration numérique d’un système différentiel à  $14n$  équations, dynamique des états adjoints incluse. Par suite, la recherche des zéros de cette fonction par la méthode de Powell nécessite un nombre important de telles évaluations et une précision numérique importante. Il est donc essentiel pour la convergence de la méthode d’intégrer le système dynamique de manière à la fois précise et rapide. Deux problèmes se posent alors. En premier lieu, la nature “bang-off-bang” des commandes  $u_j^*(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ), donne au second membre du système un caractère discontinu. La méthode de Runge-Kutta d’ordre 8 à pas adaptatif [7] que nous utilisons peine alors à satisfaire la précision demandée.

Ensuite, l’influence du  $J_2$  induit des difficultés numériques. En effet la présence de ce terme conduit à des oscillations de faible amplitude et de courte période sur certains paramètres osculateurs, ce qui conduit en pratique à des pas d’intégration faibles, et par conséquent à des temps de calcul importants en raison d’un nombre potentiellement élevé de révolutions. Cet aspect limite notamment, pour les problèmes LEO, la durée de déploiement envisageable.

Au delà des aspects numériques concernant l’intégration du système, le problème majeur que nous rencontrons est celui du non respect des hypothèses usuelles de régularité de la fonction  $\Phi(\cdot)$ , qui garantissent normalement la convergence de l’algorithme de Powell vers une solution de  $\Phi(z) = 0$ . En particulier, la fonction de tir n’est pas continûment différentiable et la propriété d’inversibilité de la Jacobienne de la fonction au voisinage d’une solution n’est pas vérifiée. Par conséquent le problème ne peut être traité sans l’introduction d’une technique spécifique, telle que la méthode de “continuation-lissage” [1].

### 3 Méthode de continuation-lissage

#### 3.1 Principe

Le principe utilisé [1] consiste à résoudre une succession de problèmes de commande optimale auxiliaires, dont les solutions convergent vers une solution locale du problème original. L'avantage principal de cette approche réside dans le fait que ces problèmes admettent des commandes optimales lisses, qui confèrent aux fonctions de tir associées les bonnes propriétés de régularité mentionnées plus haut.

Le problème auxiliaire est obtenu en ajoutant au critère du problème initial, un terme de type "fonction-barrière", ou "pénalité" suivant les cas. Ce terme est paramétré par un scalaire  $\epsilon > 0$ , que nous ferons tendre progressivement vers 0. Considérons plus précisément le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J_\epsilon(u) = -\sum_{j=1}^n \left\{ m_j(t_f) + \epsilon \int_{t_0}^{t_f} F(\|u_j(t)\|) dt \right\} \\ \dot{x}_j(t) = f(x_j(t)) + F_{max} g(x_j(t)) \frac{u_j(t)}{m_j(t)} \\ \dot{m}_j(t) = -F_{max} \frac{\|u_j(t)\|}{g_0 I_{sp}} \\ \|u_j(t)\| \leq 1 \quad t \in [t_0, t_f] \\ x_j(t_0) = x_{j,0} \quad m_j(t_0) = m_0 \\ \psi_j(x_j(t_f)) = 0 \\ \phi(x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)) = 0. \end{array} \right. , \quad (j = 1, \dots, n), \quad (11)$$

Cette approche est qualifiée d'approche par **pénalité** lorsque la fonction  $F(\cdot)$  prend des valeurs finies en 0 et 1, et d'approche par fonction **barrière** lorsque  $F(w) \rightarrow -\infty$  quand  $w$  tend vers 0 ou 1.

La procédure de continuation consiste dans un premier temps à résoudre (11) pour une valeur initiale de  $\epsilon$ , soit  $\epsilon = \epsilon_1$ . Puis, en définissant une suite décroissante de valeurs de  $\epsilon$  ( $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_N$ ), le problème (11) associé à  $\epsilon = \epsilon_k$  ( $k = 2 \dots N$ ) est résolu en utilisant la solution obtenue à l'étape  $k - 1$  comme point initial (cf.[1]). Cette procédure se termine lorsque la précision désirée sur la fonction objectif, notée  $\vartheta$ , est atteinte i.e. :

$$|J_{\epsilon_{k+1}}(u_{\epsilon_{k+1}}^*) - J_{\epsilon_k}(u_{\epsilon_k}^*)| \leq \vartheta, \quad \vartheta > 0, \text{ avec } k \text{ suffisamment grand}, \quad (12)$$

où  $u_{\epsilon_k}^*$  désigne le vecteur des commandes optimales solution du problème (11) pour  $\epsilon = \epsilon_k$ .

**Remarque 3.1** Nous ne montrons pas ici la convergence de la méthode, déjà établie dans le cas mono-satellite [1], pour une classe de fonctions  $F$  respectant certaines propriétés. La généralisation au cas multi-satellite ne pose pas de problèmes particuliers. Nous nous contentons donc de vérifier numériquement le bon fonctionnement de l'algorithme sur un cas particulier de problème à  $n$  satellites.

**Remarque 3.2** Les commandes optimales associées au problème auxiliaire (11) sont toujours indépendantes les unes des autres, dans le sens où  $u_{\epsilon,j}^*$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), dépend uniquement de l'état  $x_j$  et de l'état adjoint  $p_{x_j}$ .

## 3.2 Choix des fonctions de pénalité / barrière

Nous nous focalisons dans la suite sur deux choix particuliers de la fonction  $F$ , qui correspondent à deux phases distinctes de l'algorithme en pratique (cf. partie 3.3). Nous cherchons dans ces deux cas, pour une valeur de  $\epsilon$  donnée, la commande optimale  $u_{\epsilon,j}^*$  associée au satellite  $S_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

Considérons en premier lieu la fonction quadratique suivante, de type pénalité :

$$F^1(w) = w(1 - w) \geq 0, \quad \forall w \in [0, 1]. \quad (13)$$

L'application du PMP pour le problème associé (11) conduit, pour  $S_j$ , à la commande optimale  $u_{\epsilon,j}^*$  suivante :

– Si  $g(x_j(t))^T p_{x_j}(t) \neq \mathbf{0}_{3,1}$ , nous avons :

$$u_{\epsilon,j}^*(t) = -\beta_{\epsilon,j}(t) \frac{g(x_j(t))^T p_{x_j}(t)}{\|g(x_j(t))^T p_{x_j}(t)\|}. \quad (14)$$

La commande optimale du problème auxiliaire est donc définie de manière similaire à celle du cas limite (même expression pour la direction de poussée). En revanche, la norme de la commande est modifiée :

$$\beta_{\epsilon,j}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho_j(t) \leq -\epsilon, \\ 1 & \text{si } \rho_j(t) \geq \epsilon, \\ \frac{1}{2} + \frac{\rho_j(t)}{2\epsilon} & \text{si } \rho_j(t) \in [-\epsilon, \epsilon]. \end{cases},$$

où  $\rho_j$  est donné par (9).

– Si  $g(x_j(t))^T p_{x_j}(t) = \mathbf{0}_{3,1}$ ,  $u_{\epsilon,j}^*(t)$  est de direction quelconque mais satisfait :

$$\|u_{\epsilon,j}^*(t)\| = \beta_{\epsilon,j}(t).$$

Il est clair que :

1. la norme de la commande  $\beta_{\epsilon,j}$  à  $t$  fixé, c'est à dire en tant que fonction de  $\rho_j$ , est une approximation de  $\beta_j$ , et s'en rapproche quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .
2.  $u_{\epsilon,j}^*(t)$  est continue, mais non différentiable pour  $\rho_j(t) = \pm\epsilon$

Nous avons donc obtenu une commande continue, mais non  $C^1$ , et qui tend (en tant que fonction de  $\rho_j$ ) vers la commande optimale du problème original (2).

Le deuxième choix que nous proposons pour la fonction  $F$  est la barrière logarithmique définie par :

$$F^2(w) = \log(w) + \log(1 - w), \quad \forall w \in ]0, 1[. \quad (15)$$

Remarquons d'abord que  $F^2$  contraint la norme des commandes à rester dans l'intervalle  $]0, 1[$ , d'où l'appellation "barrière". L'application du PMP donne ensuite une commande optimale de même forme que (14), lorsque  $g(x_j(t))^T p_{x_j}(t) \neq \mathbf{0}_{3,1}$ . En revanche, la norme de  $u_{\epsilon,j}^*(t)$  ( $j = 1, \dots, n$ ), s'écrit à présent

$$\beta_{\epsilon,j}(t) = \frac{2\epsilon}{\rho_j(t) + 2\epsilon + \sqrt{\rho_j(t)^2 + 4\epsilon^2}}.$$

Dans le cas contraire, c'est à dire lorsque  $g(x_j(t))^T p_{x_j}(t) = \mathbf{0}_{3,1}$ , la direction de la commande n'est pas déterminée, et sa norme vérifie :

$$\|u_{\epsilon,j}^*(t)\| = \frac{2\epsilon}{1 + 2\epsilon + \sqrt{1 + 4\epsilon^2}}.$$

Nous voyons ici que  $\beta_{\epsilon,j}$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), considérée comme une fonction de  $\rho_j$ , est une approximation  $C^\infty$  de  $\beta_j$ , tendant vers  $\beta_j$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Cette fois la commande obtenue possède donc les bonnes propriétés de régularité pour la résolution par la méthode de Powell.

### 3.3 Implémentation

Le paragraphe précédent insiste sur la nécessité de lisser la commande pour la résolution numérique. En revanche, il ne traite pas des aspects pratiques d'implémentation ou d'initialisation de l'algorithme. Cette partie a pour objectif d'aborder ces points particuliers.

#### 3.3.1 Solution estimée et réajustement du paramètre de lissage

Malgré la régularité de la commande obtenue grâce au lissage, il est toujours nécessaire de fournir à la méthode de Powell une estimation de la solution recherchée, pour chaque valeur  $\epsilon_k$  de  $\epsilon$ . Soit donc  $k$  l'étape courante,  $\Phi_{\epsilon_k}(z) = 0$  le système à résoudre,  $z_{\epsilon_{k-1}}^*$  la solution

obtenue à l'étape précédente  $k - 1$ , et  $z_{0,\epsilon_k}$  l'estimation initiale de la solution courante. En général, la valeur optimale obtenue à l'itération précédente sera utilisée comme estimation de la nouvelle solution, ce que nous traduisons mathématiquement par  $z_{0,\epsilon_k} = z_{\epsilon_{k-1}}^*$ . En cas d'échec, une valeur de  $\epsilon$  intermédiaire, c'est à dire dans  $]\epsilon_k, \epsilon_{k-1}[$ , sera choisie. L'opération sera éventuellement renouvelée, quitte à ralentir la décroissance de la suite  $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . En effet, il arrivera nécessairement un moment où la solution optimale précédente se situe dans le bassin d'attraction de la méthode de Powell pour le nouveau problème, si le rapport  $r_k = \epsilon_k / \epsilon_{k-1}$  est suffisamment proche de 1. En pratique, la croissance de la suite  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  se stabilise la plupart du temps à une valeur  $r \in ]0, 1[$  après quelques itérations. Se pose alors le problème de l'initialisation, autrement dit comment choisir  $z_{0,\epsilon_1}$  ?

### 3.3.2 Initialisation : homotopie sur les conditions finales

Nous proposons dans la suite une méthode d'initialisation originale : commençons par effectuer une intégration numérique à commande nulle, sur la durée prévue pour le déploiement ( $u_j(t) = 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $\forall t \in [t_0, t_f]$ ). Nous obtenons ainsi la valeur des états finaux, notés  $\overline{x_j}(t_f)$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), correspondant à une dérive naturelle des satellites sous la seule influence du  $J_2$ . Nous pouvons alors évaluer la violation associée des contraintes terminales :

$$\overline{\psi_{j,f}} = \psi_j(\overline{x_j}(t_f)) \neq 0, \quad (j = 1, \dots, n), \quad \overline{\phi_f} = \phi(\overline{x_1}(t_f), \dots, \overline{x_n}(t_f)) \neq 0.$$

Considérons à présent le problème suivant, paramétré par  $\lambda \in [0, 1]$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J_{\epsilon_0}(u) = -\sum_{j=1}^n \left\{ m_j(t_f) + \epsilon_0 \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{F}^1(\|u_j(t)\|) dt \right\} \\ \dot{x}_j(t) = f(x_j(t)) + F_{max} g(x_j(t)) \frac{u_j(t)}{m_j(t)} \\ \dot{m}_j(t) = -F_{max} \frac{\|u_j(t)\|}{g_0 I_{sp}} \\ \|u_j(t)\| \leq 1 \quad t \in [t_0, t_f] \\ x_j(t_0) = x_{j,0} \quad m_j(t_0) = m_0 \\ \psi_j(x_j(t_f)) = \lambda \overline{\psi_{j,f}} \\ \phi(x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)) = \lambda \overline{\phi_f}, \end{array} \right. , \quad (j = 1, \dots, n), \quad (16)$$

où  $\lambda = 1$  dans un premier temps et  $\epsilon_0 = \frac{F_{max}}{g_0 I_{sp}}$ .

Ce problème est issu de (11), dans lequel les conditions finales ont été modifiées, et pour une instance particulière du couple  $(\epsilon, F(\cdot))$ , soit  $(\epsilon_0, F^1(\cdot))$  (cf. (13)).

En remarquant ensuite que, pour tout  $j = 1, \dots, n$ ,

$$-m_j(t_f) = \frac{F_{max}}{g_0 I_{sp}} \int_{t_0}^{t_f} \|u_j(t)\| dt - m_j(t_0) = \epsilon_0 \int_{t_0}^{t_f} \|u_j(t)\| dt - m_j(t_0),$$

il apparaît que la fonction coût dans (16) se réduit, à une constante près, au critère quadratique  $\sum_{j=1}^n \left\{ \int_{t_0}^{t_f} \|u_j(t)\|^2 dt \right\}$ .

Par construction, le problème (16) associé à  $\lambda = 1$  a alors pour solution (globale) la commande nulle  $u_{\epsilon_0, j}^*(t) = 0, (j = 1, \dots, n), \forall t \in [t_0, t_f]$ . En outre, en appliquant le PMP à ce problème, il est possible de montrer que le vecteur :

$$p_y(t_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{6n,1} \\ -\mathbf{1}_{n,1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

annulerait la fonction de tir associée, si le modèle utilisé était Keplerien. Pour notre application, qui prend en compte le terme en  $J_2$ , la norme de la fonction de tir évaluée en  $z = p_y(t_0)$ , donné par (17), reste très faible. Le vecteur (17) constitue donc une bonne approximation de la solution de (16) associé à  $\lambda = 1$ .

En résumé, nous modifions le problème (11), en ajoutant un second membre non nul aux conditions finales, en choisissant une valeur particulière de  $\epsilon$ , et en sélectionnant une fonction spécifique  $F$  (quadratique), de façon à être en mesure de fournir une solution au problème.

Il reste ensuite à opérer une phase d'homotopie (ou de continuation) sur les seconds membres des conditions finales : nous résolvons une succession de problèmes (16) associés à des valeurs  $\lambda_k$  de  $\lambda$ , que nous faisons tendre progressivement vers 0. La solution optimale du problème  $k$  est utilisée comme point initial du problème  $k + 1$ , associé à  $\lambda_{k+1}$ . De même, nous pouvons être amenés dans cette phase à "ralentir" la décroissance de  $(\lambda_k)_k$ , lorsqu'un cas d'échec de la convergence se manifeste.

En fin de procédure, lorsque le problème (16) a été résolu pour  $\lambda = 0$ , nous disposons d'une racine de la fonction de tir associée à (11), que nous notons  $z_{\epsilon_0}^*$ . À ce stade, il semblerait ensuite logique de libérer  $\epsilon$ , dont la valeur était jusqu'ici "gelée" à  $\epsilon_0$ , et de la diminuer progressivement vers 0. Cela permettrait de se rapprocher, à la limite, des solutions "bang-off-bang", suivant la méthode décrite dans le paragraphe 3.1. Cependant, des problèmes numériques apparaissent rapidement si la technique de continuation est opérée en conservant la fonction de pénalisation quadratique  $F^1$ , ceci en raison de la non-dérivabilité en certains points de la commande optimale associée (cf. § 3.2). Il est donc nécessaire de passer à une fonction générant des commandes plus régulières, telle que  $F^2$  (cf. (15)). Dans le cas mono-satellite, [1] décrit une méthode permettant alors de calculer une valeur de  $\epsilon$  adéquate, c'est à dire telle que  $z_{\epsilon_0}^*$  constitue une bonne estimation de la solution du problème (11) pour la fonction  $F^2$ . Nous noterons donc  $\epsilon_1$  cette

valeur, conformément au paragraphe 3.1. Le procédé que nous utilisons ici est rigoureusement identique à celui proposé dans [1], nous encourageons donc le lecteur à s'y référer pour plus de précisions.

Une fois cette valeur obtenue, nous résolvons donc (11) avec  $(\epsilon, F(\cdot)) = (\epsilon_1, F^2(\cdot))$ , et l'estimation  $z_{0,\epsilon_1} = z_{\epsilon_0}^*$ . Nous procédons ensuite à la continuation sur  $\epsilon$  pour la barrière logarithmique  $F^2$ , jusqu'à la satisfaction du test d'arrêt (12).

## 4 Fonctionnalités additionnelles

### 4.1 Technique de globalisation

L'implémentation de notre méthode comporte une couche algorithmique supplémentaire dont le rôle consiste à isoler le plus grand nombre possible de minima locaux du problème non convexe à traiter. Le principe adopté ici consiste à générer de manière aléatoire un ensemble de points initiaux candidats, à partir desquels la méthode (locale) de continuation-lissage est ensuite mise en œuvre. Nous espérons ainsi que ces points initiaux conduiront à des stratégies de manœuvres différentes. Cependant, les difficultés de convergence de la méthode de Powell imposent encore une fois de choisir une bonne estimation initiale des états adjoints solutions. Nous procéderons en perturbant légèrement le vecteur  $z_\epsilon^*$  "nominal" courant, à un stade donné de l'algorithme. Il y a donc un compromis à trouver ici puisque, d'autre part, la distance entre les vecteurs candidats et la solution nominale doit être suffisamment grande pour éviter de converger vers une stratégie identique en fin d'algorithme.

Plusieurs possibilités sont également envisageables en ce qui concerne la phase de l'algorithme choisie pour générer ces points. Les tests numériques que nous avons réalisés nous conduisent à déclencher le processus après la première itération de la procédure de continuation sur  $\epsilon$ , pour la fonction  $F^2$ . La valeur  $z_{\epsilon_1}^*$  est donc perturbée aléatoirement afin obtenir plusieurs vecteurs candidats, à partir desquels nous menons en parallèle autant de schémas de continuation. Ce choix nous permet d'économiser le temps de calcul. En effet, si nous avons réalisé le processus de perturbation à une étape  $k$  de l'initialisation (homotopie sur les conditions finales 3.3.2), il aurait fallu mener jusqu'au bout cette phase pour chaque point candidat. À l'inverse, le choix consistant à lancer le processus aléatoire seulement en toute fin d'algorithme, c'est à dire une fois que la solution principale a été obtenue, ne semble donner que des cas d'échec. Ceci est dû au caractère non lisse de la commande obtenue pour  $\epsilon$  proche de 0, et à la sensibilité numérique qui en résulte.

L'approche heuristique de globalisation pour le problème (2) que nous venons de décrire ne fournit pas la garantie de trouver l'optimum global du problème. Elle ne produit pas non plus l'ensemble exhaustif des stratégies possibles. Toutefois, elle permet en pratique de générer efficacement plusieurs stratégies distinctes, tant du point de vue des directions et dates de poussées, que de la consommation totale en ergols ou encore de la répartition de cette consommation

entre les satellites.

## 4.2 Méthode d'équilibrage des consommations

Nous présentons finalement une technique originale permettant de modifier une stratégie de déploiement existante, obtenue par notre méthode et donc localement optimale, afin qu'elle respecte une condition supplémentaire d'équilibrage des consommations entre les satellites. En effet, la plupart des missions spatiales impliquant des formations imposent une bonne répartition des masses entre les satellites en fin de déploiement, afin de maximiser la durée de vie de la formation.

### 4.2.1 Modélisation

Idéalement, la prise en compte de cette condition consisterait à modifier le problème (2) en lui ajoutant la contrainte suivante :

$$\gamma \leq \bar{\gamma}, \quad (18)$$

où  $\bar{\gamma} \in [0, 1]$  et  $\gamma$  est défini, pour une stratégie de déploiement donnée, suivant :

$$\gamma = \frac{\max_{1 \leq k < j \leq n} |m_j(t_f) - m_k(t_f)|}{\sum_{j=1}^n (m_0 - m_j(t_f))} = \frac{\Delta m_{\max}}{c}. \quad (19)$$

De cette manière, l'écart maximum entre les consommations  $\Delta m_{\max} = \max_{1 \leq k < j \leq n} |m_j(t_f) - m_k(t_f)|$  serait majoré par une fraction  $\bar{\gamma}$  de la consommation totale  $c = \sum_{j=1}^n (m_0 - m_j(t_f))$ . Cependant, cette contrainte est non lisse et ne peut donc être gérée à travers le PMP. Nous utiliserons par conséquent la contrainte alternative suivante :

$$\theta \geq \bar{\theta}, \quad (20)$$

où  $\bar{\theta} \in [0, 1]$  et  $\theta$  est défini, pour une stratégie de déploiement donnée, par :

$$\theta = \frac{-\sum_{j=1}^n \zeta_j \log \zeta_j}{\log(n)}, \quad (21)$$

où

$$\zeta_j = \left( \frac{m_j(t_f)}{\sum_{k=1}^n m_k(t_f)} \right), \quad (j = 1, \dots, n). \quad (22)$$

*Nous cherchons alors à résoudre le problème*  $(P_{\bar{\theta}, \geq})$ , issu de (2), auquel nous ajoutons la contrainte (20). Expliquons nous à présent sur ce choix.

En premier lieu, remarquons que les quantités  $\zeta_j$ ,  $(j = 1, \dots, n)$ , définies en (22), évoluent dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Par suite, la fonction "entropie" intervenant dans (21),  $-\sum_{j=1}^n \zeta_j \log \zeta_j$ ,

avec  $\sum_{j=1}^n \zeta_j = 1$ , est à valeurs dans  $]0, \log(n)[$ . Il est alors aisé de montrer que son maximum,  $\log(n)$ , est atteint pour :

$$\hat{\zeta}_j = \frac{1}{n}, \quad (j = 1, \dots, n),$$

c'est à dire lorsque les satellites ont tous consommé la même quantité d'ergols, autrement dit lorsque l'équilibrage des consommations est parfait. Nous remarquons que la quantité  $\theta$  atteint alors également son maximum  $\hat{\theta} = 1$ . Il suffit donc d'imposer  $\bar{\theta} = 1$  dans (20) pour forcer  $\theta = \hat{\theta} = 1$ , cas où l'équilibrage des consommations entre satellites est parfait.

À l'inverse, quand  $\bar{\theta} = 0$ , la contrainte (20) est trivialement vérifiée, quelle que soit la répartition des consommations entre satellites. En d'autres termes, la contrainte n'existe plus dans ce cas.

En conclusion, la satisfaction de (20), pour une valeur  $\bar{\theta} \in ]0, 1[$ , permet d'assurer un **degré  $\theta$  d'équilibrage des consommations entre les satellites** supérieur à celui défini par  $\bar{\theta}$ .

**Remarque 4.1** *Pour la contrainte (18), c'est au contraire en fixant  $\bar{\gamma} = 0$ , d'une part, que l'on impose l'équilibrage parfait des consommations, et  $\bar{\gamma} = 1$ , d'autre part, que l'on relaxe la contrainte. Pour des valeurs dans  $]0, 1[$ , il n'est pas possible d'associer de manière stricte à  $\theta$  une valeur maximale des écarts de consommation, et donc de  $\gamma$ . Notons enfin que  $\theta$  étant une fonction  $C^\infty$  de  $m_j(t_f)$ ,  $(j = 1, \dots, n)$ , la contrainte (20) est adaptée à l'application du PMP.*

#### 4.2.2 Prise en compte de la contrainte

Bien que prévu dans le cadre du PMP, le traitement de conditions terminales sous forme d'inégalités n'est pas aisé numériquement. Cela dit, le fait que (20) soit l'unique contrainte de ce type au sein de notre problème va nous conduire à la traiter comme une égalité.

Considérons en effet dans un premier temps un minimum local  $z$  de  $(P_{\bar{\theta},\geq})$ . Seules deux situations sont envisageables :

- la contrainte (20) est inactive en ce point ( $\theta > \bar{\theta}$ ), et nous avons l'équivalence suivante :

$$\begin{array}{ccc} z \text{ solution locale de (2)} & \iff & z \text{ solution locale de } (P_{\bar{\theta},\geq}) \\ \theta > \bar{\theta} & & \theta > \bar{\theta} \end{array} \quad (23)$$

- la contrainte est active en ce point ( $\theta = \bar{\theta}$ ), et nous avons les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} z \text{ solution locale de (2)} & \implies & z \text{ solution locale de } (P_{\bar{\theta},\geq}) & \implies & z \text{ solution locale de } (P_{\bar{\theta},=}), \\ \theta = \bar{\theta} & & \theta = \bar{\theta} & & \end{array} \quad (24)$$

où  $(P_{\bar{\theta},=})$  est obtenu à partir du problème (2), en ajoutant la contrainte  $\theta = \bar{\theta}$ .

À partir de ces observations, nous allons construire une méthode qui va modifier localement une solution du problème sans contrainte (2) pour qu'elle satisfasse la contrainte d'équilibrage (20). Selon les cas, nous disposerons d'une solution de  $(P_{\bar{\theta},\geq})$ , ce qui est notre objectif premier, ou seulement de  $(P_{\bar{\theta},=})$ . Ce point est discuté dans le paragraphe 4.2.3.

Considérons donc à présent une solution locale de (2). Deux situations sont possibles :

- $\theta \geq \bar{\theta}$ , la solution locale dont nous disposons est, d'après (23) et (24), solution de  $(P_{\bar{\theta},\geq})$ ,
- $\theta < \bar{\theta}$ , nous allons chercher une solution de  $(P_{\bar{\theta},=})$  en “modifiant” la solution de (2), afin d'augmenter la valeur de  $\theta$  jusqu'à  $\bar{\theta}$ . Pour ce faire, il serait logique d'évaluer **en fin d'algorithme** la valeur de  $\theta$  associée à la solution de (2), que nous notons  $\theta_0$ , puis de déclencher une méthode de continuation consistant à résoudre successivement  $(P_{\eta,=})$ , avec  $\eta$  variant de  $\theta_0$  à  $\bar{\theta}$ , en utilisant les principes déjà plusieurs fois décrits dans ce document. En effet, d'après (24), toute solution de (2) associée à  $\theta_0$  est également solution de  $(P_{\theta_0,=})$ . La continuation sur  $\eta$  nous permettrait donc de résoudre finalement  $(P_{\bar{\theta},=})$ . Mais une nouvelle fois apparaissent des difficultés numériques liées au caractère non lisse de la commande. Il est en fait nécessaire de déclencher le processus plus en amont, à un stade de l'algorithme où la commande est suffisamment lisse. Dans un souci de concision, nous ne détaillerons pas ici plus avant la méthode mise en œuvre.

### 4.2.3 Optimalité des solutions équilibrées

La réciproque des implications dans (24) n'est vraie que si (2) est convexe, ce qui n'est pas le cas ici. Or, nous cherchons justement à résoudre  $(P_{\bar{\theta},\geq})$  à l'aide des solutions de  $(P_{\bar{\theta},=})$ . Cela implique théoriquement de connaître *tous* les minima locaux de  $(P_{\bar{\theta},=})$ , afin de les tester et d'en extraire d'éventuelles solutions de  $(P_{\bar{\theta},\geq})$ . Cela est difficile à réaliser, nous calculons en pratique une seule solution de  $(P_{\bar{\theta},=})$ , selon le principe décrit plus haut. Nous ne pouvons donc assurer que celle-ci soit localement optimale pour  $(P_{\bar{\theta},\geq})$ .

Cependant, il existe par définition un voisinage de la solution locale du problème (2), où celui-ci est localement convexe. Si la valeur de  $\bar{\theta}$  n'est pas trop éloignée de  $\theta_0$ , il est probable

que  $P_{\theta,=}$  possède alors une solution dans ce voisinage et, l'hypothèse de convexité (locale) étant vérifiée, que celle-ci soit également solution de  $(P_{\theta,\geq})$ . Notre processus "local" de continuation minimise alors le risque de "basculer" sur une autre solution de  $(P_{\theta,=})$  qui soit admissible mais non optimale pour  $(P_{\theta,\geq})$ .

## 5 Tests numériques

Cette section présente les résultats numériques obtenus par notre méthode sur un cas de déploiement de quatre satellites en orbite basse, déjà présenté dans la partie 2. Nous rappelons cependant que l'approche proposée est facilement transposable à un contexte différent, en modifiant en particulier le modèle dynamique et les conditions terminales dans (2).

### 5.1 Données du problème de déploiement

Ce paragraphe détaille tout d'abord les données numériques (correspondant aux paramètres osculateurs) utilisées lors des tests.

#### 5.1.1 Paramètres communs aux quatre satellites

##### Conditions initiales :

Les quatre satellites de la formation sont injectés à  $t = t_0 = 0.0s$  sur la même orbite, quasi-circulaire, et héliosynchrone. Nous avons donc :

$$(a_j, e_j, i_j, \omega_j, \Omega_j)^T(t_0) = (a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0)^T, (j = 1, \dots, n), \quad (25)$$

avec :

- $a_0 = 7029.48$  km,
- $e_0 = 1.27 \times 10^{-3}$ ,
- $i_0 = 98.08$  deg,
- $\omega_0 = 214.51$  deg,
- $\Omega_0 = 209.80$  deg.

Les masses initiales des satellites sont identiques (cf. 2.1),  $m_j(t_0) = m_0$ , ( $j = 1, \dots, n$ ), avec  $m_0 = 120$  kg. Nous prenons également (cf. 2.1)  $F_{max} = 4$  N et  $I_{sp} = 210$  s.

##### Conditions terminales :

À  $t = t_f$ , les paramètres visés suivants sont communs aux quatre satellites :

$$\begin{pmatrix} a_{j,f} \\ e_{j,f} \\ i_{j,f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_f \\ e_f \\ i_f \end{pmatrix}, (j = 1, \dots, n), \quad (26)$$

avec :

- $a_f = 7031$  km,
- $e_f = 0$ ,
- $i_f = 98.08$  deg.

**Remarque 5.1** *Pour simplifier l'interprétation des résultats, nous avons considéré que les valeurs oscultrices données ci-dessus étaient communes aux quatre satellites. Dans la pratique, ces valeurs sont légèrement différentes d'un satellite à l'autre.*

### 5.1.2 Paramètres spécifiques

Configuration initiale :

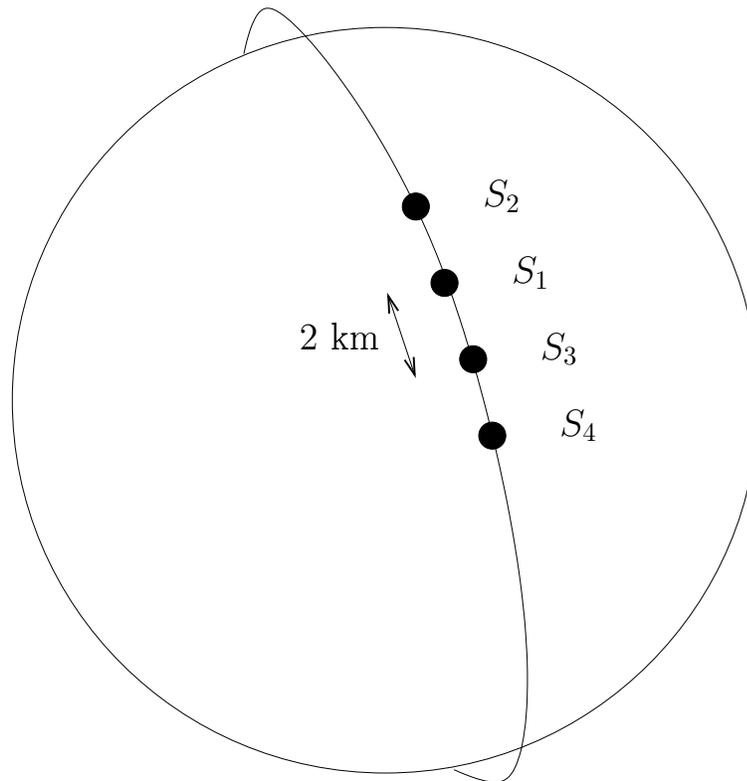


FIG. 1 – Configuration initiale de la formation

Les satellites sont initialement répartis régulièrement le long de l'orbite décrite dans le paragraphe 5.1.1, deux satellites successifs étant déphasés d'environ 0.016 deg, ce qui correspond ici à une distance de l'ordre de 2 km. Plus précisément, pour  $(j = 1, \dots, n)$ , l'anomalie vraie  $v_j$  du satellite  $S_j$  satisfait  $v_j(t_0) = v_{j,0}$ , avec :

- $v_{1,0} = 209.5601$  deg,
- $v_{2,0} = 209.5764$  deg,
- $v_{3,0} = 209.5438$  deg,
- $v_{4,0} = 209.5275$  deg.

La figure 1 illustre cette configuration. L'ordre choisi pour les satellites sur cette orbite de transfert permettra de minimiser les risques de collision entre satellites lors du déploiement vers la configuration finale, décrite plus bas. Notons que cet ordre n'a que très peu influence sur les stratégies de manœuvres et les consommations associées. Les satellites jouent des rôles similaires, car la distance initiale les séparant est négligeable devant les distances inter-satellites à  $t = t_f$ .

Configuration finale :

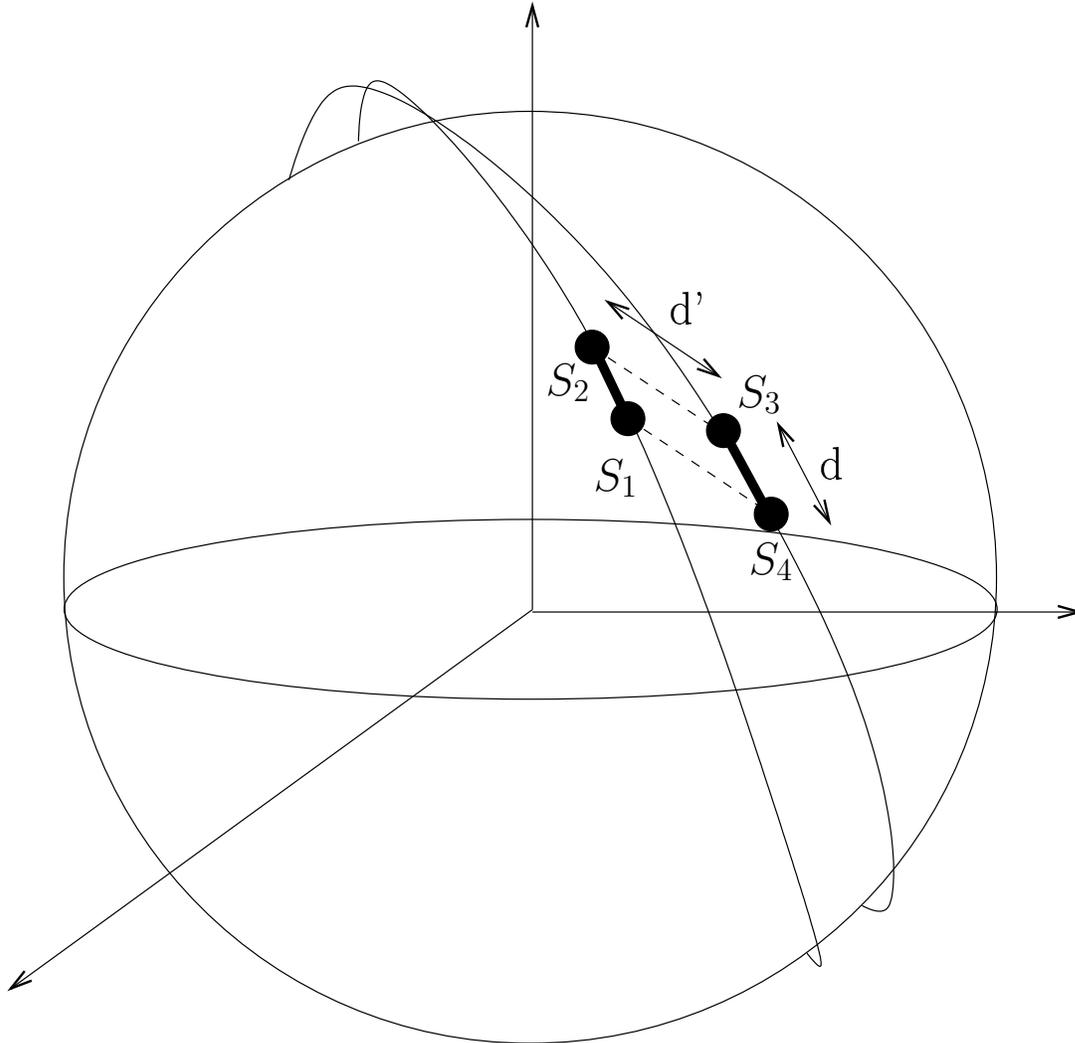


FIG. 2 – Configuration finale de la formation

Les écarts finaux de plan et longitude vraie entre les satellites sont fixés aux valeurs suivantes :

- $\delta \Omega_{1,f} = 0.0 \text{ deg}$ ,
- $\delta \Omega_{2,f} = +0.47 \text{ deg}$ ,
- $\delta \Omega_{3,f} = 0.0 \text{ deg}$ , d'une part,
- $\delta L_{1,f} = +0.41 \text{ deg}$ ,
- $\delta L_{2,f} = -0.14 \text{ deg}$ ,

$$- \delta L_{3,f} = -0.41 \text{ deg, d'autre part,}$$

en accord avec les notations précédentes (cf. § 2.2).

Pour faciliter l'interprétation des résultats dans la suite, nous allons raisonner sur les arguments de latitude vraie  $\alpha = \omega + v$ , au lieu des longitudes vraies. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} - \alpha_2(t_f) - \alpha_1(t_f) &= \delta \alpha_{1,f} = 0.41 \text{ deg,} \\ - \alpha_3(t_f) - \alpha_2(t_f) &= \delta \alpha_{2,f} = -0.61 \text{ deg,} \\ - \alpha_4(t_f) - \alpha_3(t_f) &= \delta \alpha_{3,f} = -0.41 \text{ deg,} \end{aligned}$$

avec  $\delta \alpha_{j,f} = \delta L_{j,f} - \delta \Omega_{j,f}$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ). Il y a bien sûr équivalence entre les deux écritures, à partir du moment où les valeurs  $\delta \Omega_{j,f}$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ) sont fixées, puisque  $L = \Omega + \alpha$ .

Comme le montre la figure 2, les satellites  $S_1$  et  $S_2$ , d'une part,  $S_3$  et  $S_4$ , d'autre part, sont placés sur les mêmes orbites. Cela est traduit plus haut par  $\delta \Omega_{1,f} = \delta \Omega_{3,f} = 0.0 \text{ deg}$ . L'égalité  $\delta \alpha_{3,f} = -\delta \alpha_{1,f}$  impose en outre que les distances entre  $S_1$  et  $S_2$ , d'une part,  $S_3$  et  $S_4$ , d'autre part, soient égales (aux perturbations près) à  $d = 50 \text{ km}$ , les orbites étant circulaires et de même rayon. Une fois la configuration finale obtenue, la géométrie de la formation évolue le long des orbites, mais les écarts visés en  $\alpha$  et  $\Omega$  permettent de maintenir une distance  $d'$  proche de 100 km.

Du point de vue de la mécanique spatiale, il convient de noter que pour notre application, l'essentiel des ergols consommés lors des manœuvres de déploiement sera consacré à la séparation des plans contenant les satellites  $S_1$  et  $S_2$  d'une part,  $S_3$  et  $S_4$  d'autre part. En effet, les valeurs visées pour les autres paramètres orbitaux (demi-grand axe, excentricité, inclinaison) sont sensiblement égales aux valeurs initiales pour chaque satellite, sauf pour les arguments de latitude vraie. Nous constaterons que les écarts entre ces derniers seront obtenus grâce à des manœuvres tangentielles peu coûteuses. C'est pourquoi nous nous intéresserons principalement dans la suite à l'évolution des écarts entre les paramètres orbitaux de  $S_2$  et  $S_3$ . Nous aurions évidemment pu choisir indifféremment les satellites  $S_1$  et  $S_4$ .

## 5.2 Déploiement sur une durée de sept jours

Nous présentons ici deux stratégies de déploiement obtenues par notre méthode pour une valeur de  $t_f = 7$  jours. Le procédé de globalisation décrit au paragraphe 4.1 nous a permis en réalité d'isoler **sept stratégies distinctes** au total (cf. tableau 2, § 5.4), qui correspondent à une consommation totale en ergols variant de 10.62 kg, pour la plus mauvaise, à 6.58 kg pour la meilleure. Par abus de langage, nous utiliserons dans la suite l'adjectif "global" pour désigner cette dernière. Nous rappelons que toutes les solutions obtenues sont localement optimales.

**NOTATION** : Pour analyser les stratégies obtenues dans la suite, nous définissons la grandeur  $(X_j - X_i)_m$ , pour deux satellites  $S_i$  et  $S_j$ , et concernant le paramètre orbital  $X$ , comme la valeur

moyenne de l'écart en  $X$  entre les deux satellites sur la durée  $t_f$  de déploiement, soit :

$$(X_j - X_i)_m = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (X_j(t) - X_i(t)) dt.$$

### 5.2.1 Solution "globale"

La consommation totale (somme des consommations des satellites) obtenue par notre méthode vaut donc ici 6.58 kg. Les manœuvres sont au nombre de 27 au total, réparties en

- 6 poussées sur une durée totale de 0.228 h pour  $S_1$ ,
- 7 poussées sur une durée totale de 0.229 h pour  $S_2$ ,
- 7 poussées sur une durée totale de 0.241 h pour  $S_3$ ,
- 7 poussées sur une durée totale de 0.241 h pour  $S_4$ .

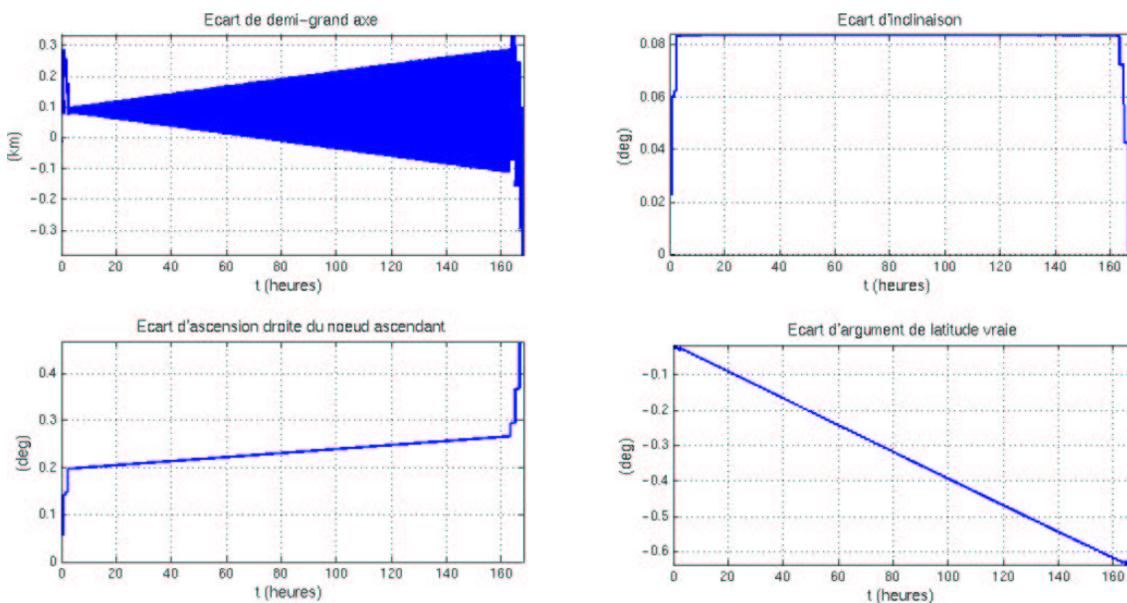


FIG. 3 – Évolution des paramètres différentiels entre satellites  $S_2$  et  $S_3$ , solution globale.

La figure 3 indique que la stratégie utilisée pour obtenir l'écart de  $\Omega$  visé à  $t = t_f$  ( $\delta\Omega_{2,f} = 0.47$  deg), entre  $S_2$  et  $S_3$ , consiste à combiner les deux effets suivants :

- la dérive différentielle en  $\Omega$  due à l'effet du  $J_2$ , liée à l'existence d'un écart d'inclinaison entre les orbites  $(i_3 - i_2)_m$  (valant environ  $\Delta i_{\delta\Omega_{2,f}} = +0.08$  deg), lui-même obtenu par des poussées hors plan opposées sur les deux satellites (non visibles ici),
- l'effet "instantané" sur  $\Omega$  dû à ces mêmes poussées hors plan (localisées en début et en fin de déploiement).

Les ruptures de pente de la courbe (figure 3) donnant  $\Omega_3 - \Omega_2$  en fonction du temps témoignent de ces effets successifs.

Nous constatons qu'il existe également un écart de demi-grand axe non nul entre les satellites  $(a_3 - a_2)_m$ , dont le rôle est essentiellement d'assurer l'écart  $\delta \alpha_{2,f} = -0.61$  deg à  $t = t_f$ . Nous relevons  $(a_3 - a_2)_m \approx \Delta a_{\delta \alpha_{2,f}} = +90$  m sur la figure 3.

**Remarque 5.2** *Les contraintes sur les paramètres visés sont satisfaites avec une précision relative inférieure à 1%. Cela n'est pas visible sur les courbes pour des raisons d'échelle.*

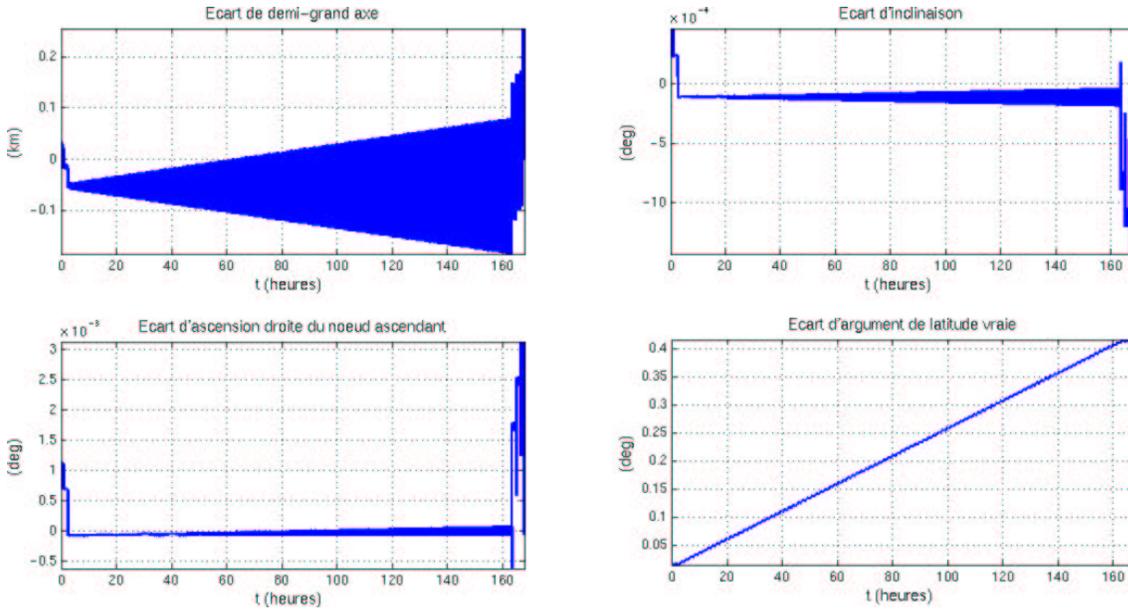


FIG. 4 – Évolution des paramètres différentiels entre satellites  $S_1$  et  $S_2$ , solution globale.

La figure 4 donne ensuite l'évolution des mêmes paramètres différentiels, mais cette fois entre  $S_1$  et  $S_2$ . De nouveau, un léger écart de demi-grand axe  $(a_2 - a_1)_m$  a été généré, de façon à déphaser les satellites au temps  $t_f$  et obtenir  $\delta \alpha_{1,f} = +0.41$  deg. Nous estimons sa valeur à  $(a_2 - a_1)_m \approx \Delta a_{\delta \alpha_{1,f}} = -55$  m.

En revanche, nous n'observons pas dans ce cas d'écart significatif d'inclinaison entre  $S_1$  et  $S_2$ , les deux satellites concernés étant dans le même plan en fin de déploiement.

**Remarque 5.3** *Les paramètres orbitaux que nous visons à  $t = t_f$  correspondent à des valeurs osculatrices, donc oscillantes en raison du  $J_2$ . Ce phénomène impose en particulier l'existence, au sein de la stratégie, de manœuvres de faible amplitude, dont le but est de satisfaire les conditions finales avec précision. En particulier, nous constatons sur la figure 4 l'existence entre  $S_1$  et  $S_2$  d'un très faible écart d'inclinaison, provoqué par des manœuvres hors plan. L'effet des oscillations du  $J_2$  sur la valeur de l'inclinaison est ainsi "corrigé",  $S_1$  et  $S_2$  atteignent avec précision à  $t = t_f$  l'inclinaison spécifiée  $i_f$ .*

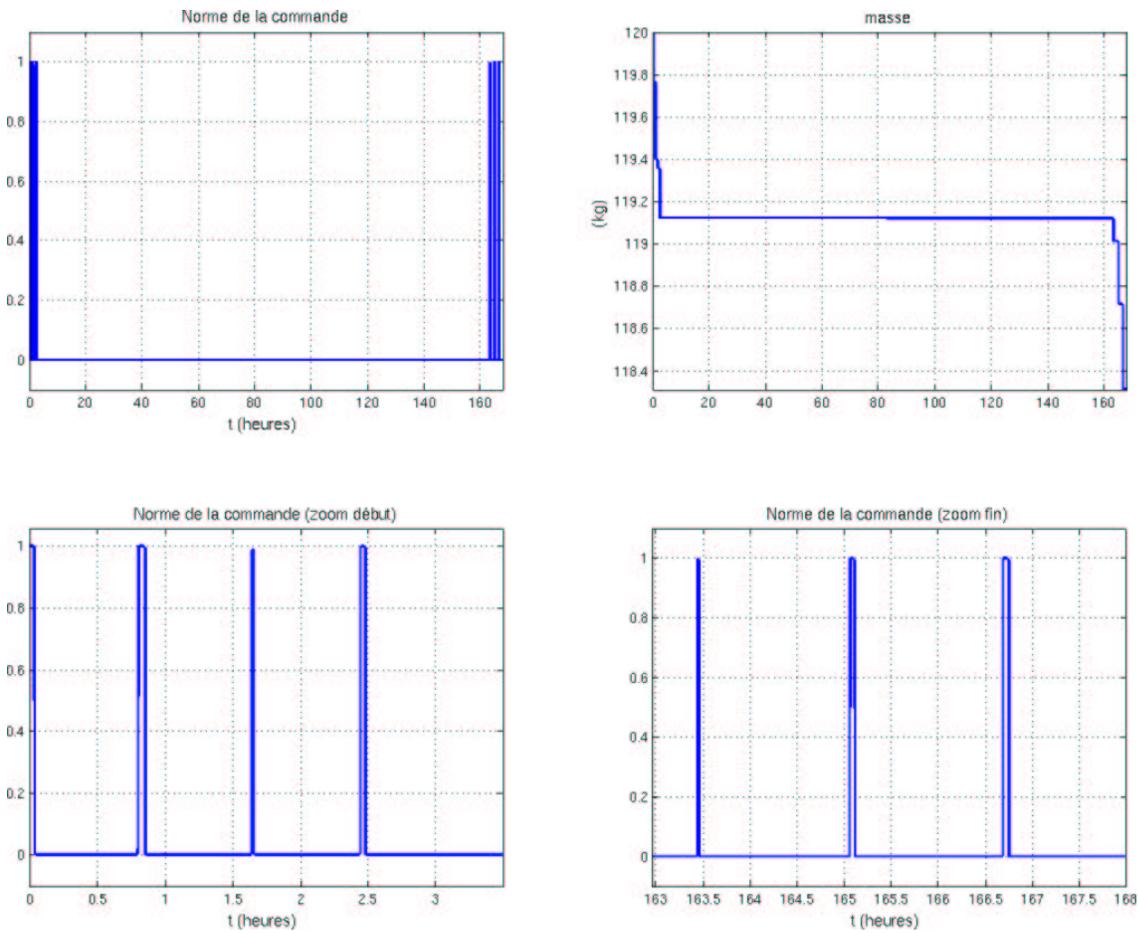


FIG. 5 – Norme de la commande et masse du satellite  $S_4$ , solution globale.

Finalement, nous donnons dans la figure 5 les évolutions temporelles de la norme de la commande et de la masse du satellite  $S_4$  (choisi arbitrairement). En effet, les allures de ces courbes sont très similaires d’un satellite à l’autre, et leur premier intérêt est de confirmer graphiquement le caractère “bang-off-bang” de ces commandes. D’un peu plus près, nous remarquons également la brièveté des manœuvres, localisées en début et en fin de déploiement. D’une durée d’environ *deux minutes*, ces poussées sont quasi-impulsionnelles pour notre application. Ce dernier point est important car il démontre une grande robustesse de l’approche mêlant commande optimale et lissage. Celle-ci est donc d’une part capable de traiter avec précision des problèmes sur plusieurs semaines, en orbite basse (avec effet du  $J_2$ ), et de grande taille (plusieurs satellites). Elle permet d’autre part de fournir, lorsque cela est nécessaire, des stratégies quasi-impulsionnelles, ce à quoi elle n’est *a priori* pas dédiée.

### 5.2.2 Exemple de stratégie alternative

#### Préambule

Imaginons une stratégie concurrente de la précédente, consistant à faire dériver, grâce au  $J_2$ , l’angle  $\Omega$  entre  $S_2$  et  $S_3$ , en créant un écart *de demi-grand axe* entre ces mêmes satellites à l’aide de poussées tangentielles.

Supposons alors les manœuvres impulsives et réparties de manière symétrique sur chaque satellite, et utilisons l'expression de l'écart séculaire en  $\Omega$  dû au  $J_2$  (cf. Annexe A). Nous pouvons estimer que, pour la valeur des paramètres orbitaux de notre application, un écart de demi-grand axe  $(a_3 - a_2)_m \approx \Delta a_{\delta\Omega_{2,f}} = -135$  km environ est nécessaire pour obtenir la valeur visée  $\delta\Omega_{2,f} = +0.47$  deg, dans l'horizon de temps imparti (7 jours).

Nous ne retrouvons pas cette stratégie simple par notre approche de globalisation car ***elle n'est pas admissible pour notre application*** (cf. Annexe A). En effet l'écart d'argument de latitude vraie visé, entre les satellites  $S_2$  et  $S_3$  par exemple, s'écrit :

$$\alpha_3(t_f) - \alpha_2(t_f) = \delta\alpha_{2,f} + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

et impose, pour l'écart de demi-grand axe (cf. Annexe A), la relation suivante :

$$(a_3 - a_2)_m = \Delta a_{\delta\alpha_{2,f}} + k\Delta a_{2\pi}, k \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Dans la relation ci-dessus,  $\Delta a_{\delta\Omega_{2,f}}$  est la constante définie au paragraphe 5.2.1 et  $\Delta a_{2\pi}$  est la valeur de l'écart de demi-grand axe permettant d'obtenir, à  $t = t_f$ , un déphasage de  $2\pi$ . Ainsi, les écarts de demi-grand axe admissibles prennent des valeurs discrètes, et la condition précédente  $(a_3 - a_2)_m = \Delta a_{\delta\Omega_{2,f}}$  ne peut être vérifiée simultanément, sauf pour des valeurs très particulières de  $\delta\Omega_{2,f}$  (cf. Annexe A). C'est pourquoi, pour notre application, des manœuvres hors plan significatives, créant un écart d'inclinaison puis, de manière indirecte, une dérive complémentaire en  $\Omega$ , sont requises pour assurer l'écart visé  $\delta\Omega_{2,f}$ . Ainsi, nous obtenons en pratique des "stratégies hybrides", associées à différentes valeurs de  $k$ , combinant poussées hors plan (significatives) et tangentiellles. La stratégie locale que nous présentons ci-dessous en est un exemple.

**Remarque 5.4** *La stratégie globale étudiée précédemment est également un cas particulier de "stratégie hybride", pour laquelle  $k = 0$ .*

#### Stratégie réelle :

La consommation totale en ergols pour cette solution locale est de 7.1 kg. Les 20 manœuvres cumulées se répartissent en

- 4 poussées sur une durée totale de 0.266 h pour  $S_1$ ,
- 4 poussées sur une durée totale de 0.265 h pour  $S_2$ ,
- 5 poussées sur une durée totale de 0.244 h pour  $S_3$ ,
- 7 poussées sur une durée totale de 0.243 h pour  $S_4$ .

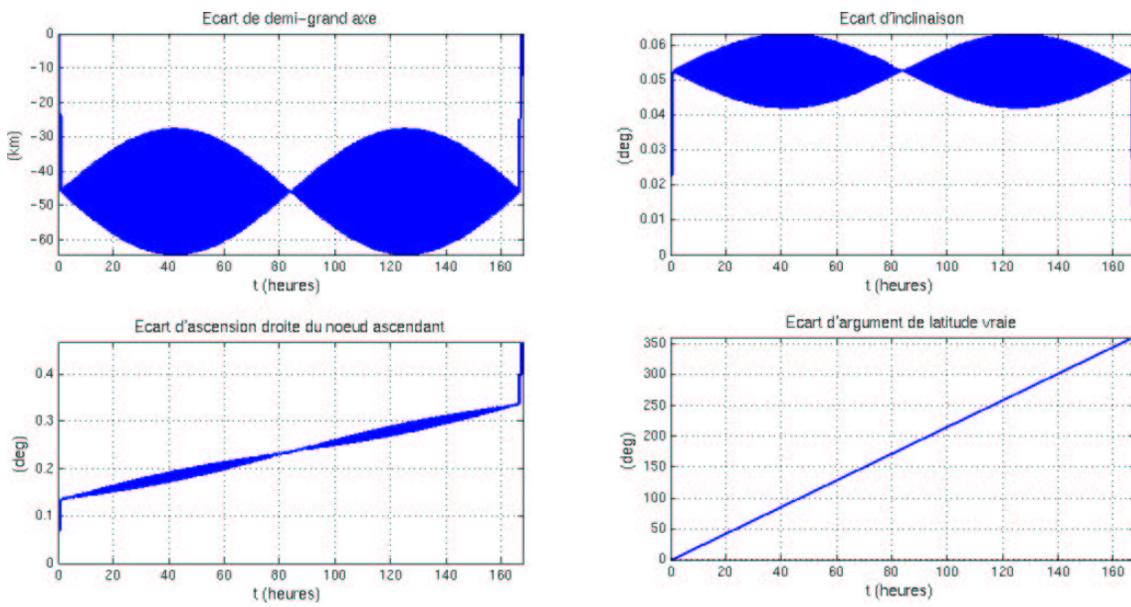


FIG. 6 – Évolution des paramètres différentiels entre satellites  $S_2$  et  $S_3$ , solution locale.

Nous constatons sur la figure 6 qu’un écart de demi-grand axe  $(a_3 - a_2)_m \approx -45$  km a été créé entre les satellites  $S_2$  et  $S_3$ . Cette valeur correspond en fait à la quantité  $\Delta a_{2\pi}$  dans (27). La condition (27) est alors satisfaite, avec  $k = 1$ , le terme  $\Delta a_{\delta\alpha_{2,f}}$  ( $= +90$  m) étant ici négligeable devant  $\Delta a_{2\pi}$ . Nous observons bien un écart d’une révolution entre  $S_2$  et  $S_3$ , puisque l’écart final entre les arguments de latitude vraie est supérieur à 360 deg sur la figure 6.

L’écart d’inclinaison  $((i_3 - i_2)_m = +0.05$  deg), quant à lui, est logiquement inférieur à la valeur  $\Delta i_{\delta\Omega_{2,f}} = +0.08$  deg, obtenue pour la solution globale. C’est en effet la “somme” des dérivées, résultant des écarts de demi-grand axe et d’inclinaison, qui est utilisée pour décaler les plans des orbites correspondantes de la valeur demandée à  $t = t_f$ .

L’évolution des autres paramètres étant similaire à celle observée pour la solution globale, nous ne fournissons pas ici les courbes correspondantes.

### 5.3 Évolution de la stratégie globale lorsque $t_f$ varie

Il nous semble à présent intéressant d’étudier l’évolution d’une solution donnée lorsque la durée de déploiement varie. Nous nous focalisons dans ce paragraphe sur la solution dite “globale” décrite au paragraphe 5.2.1, et nous examinons l’évolution de cette stratégie pour les valeurs suivantes de  $t_f$  : 3.5, 7, 14, 16.5, et finalement 19 jours.

**Remarque 5.5** *Nous nous sommes limités ici à la valeur maximale  $t_f = 19$  jours car elle correspond à la limite de fonctionnement nominal de notre logiciel, dans notre configuration matérielle (SUN Ultra-Sparc 2500). Pour des durées supérieures, les oscillations dues au  $J_2$  et la sensibilité numérique de la méthode de Powell entraînent des temps de calcul démesurément longs, voire mettent en échec notre solver.*

Une fois encore, nous nous restreignons à l'étude des paramètres différentiels associés aux satellites  $S_2$  et  $S_3$ . Les deux séries de courbes des figures 7 et 8 correspondent aux durées de déploiement respectives  $t_f = 3.5$  et  $t_f = 19$  jours, c'est à dire les durées extrêmes envisagées lors de nos cas-tests. Les allures des courbes pour des durées intermédiaires sont semblables, seules les valeurs numériques diffèrent.

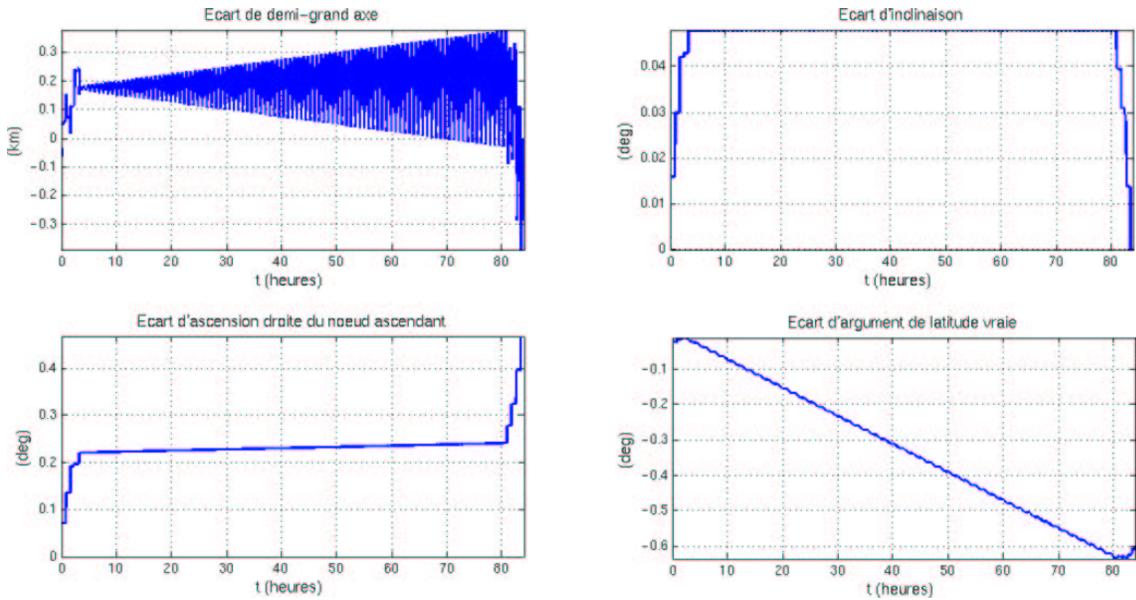


FIG. 7 – Évolution des paramètres différentiels entre  $S_2$  et  $S_3$ , solution globale,  $t_f = 3.5$  jours.

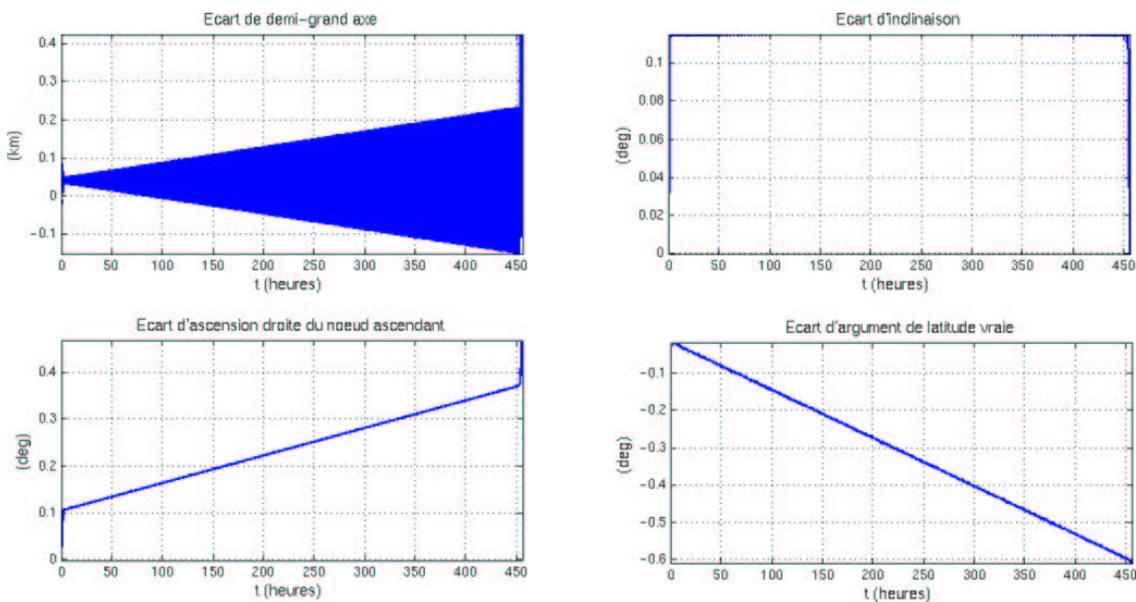


FIG. 8 – Évolution des paramètres différentiels entre  $S_2$  et  $S_3$ , solution globale,  $t_f = 19$  jours.

Intéressons nous d'abord à l'évolution de l'écart de demi-grand axe. Nous constatons que la valeur nécessaire à la création du déphasage final  $\delta \alpha_{2,f} = -0.61$  deg diminue logiquement

lorsque le temps alloué au déploiement augmente. Ainsi, cette valeur passe de 175 m pour  $t_f = 3.5$  jours à 40 m pour  $t_f = 19$  jours.

Nous observons ensuite sur les figures 7 et 8 que la contribution de type “dérive due au  $J_2$ ” à la création de l’écart final d’ascension droite du nœud ascendant ( $\delta\Omega_{2,f} = +0.47$  deg) augmente avec  $t_f$ . Ainsi, la partie (centrale) de la courbe associée à  $t_f = 3.5$  jours présente une pente quasi-nulle tandis que, pour  $t_f = 19$  jours, l’effet de la dérive est supérieur à celui des poussées.

Nous remarquons enfin que les valeurs de l’écart d’inclinaison relevées expérimentalement augmentent avec  $t_f$  (de 0.048 à 0.115 deg). Nous verrons cependant qu’en réalité cette grandeur n’évolue pas de manière monotone.

Le tableau suivant résume les mesures  $(a_3 - a_2)_m$  et  $(i_3 - i_2)_m$  des moyennes temporelles des écarts de demi-grand axe et d’inclinaison, respectivement. La consommation totale associée  $c$  est également mentionnée, pour chaque valeur de  $t_f$  testée. Enfin,  $\frac{(\Omega_3 - \Omega_2)_d}{\delta\Omega_{2,f}} \times 100$ , dans la dernière colonne, désigne la valeur de la dérive de l’écart d’ascension droite du nœud ascendant, exprimée en pourcentage de l’écart total  $\delta\Omega_{2,f}$ .

$t_f$ (jours)	$c$ (kg)	$(a_3 - a_2)_m$ (m)	$(i_3 - i_2)_m$ (deg)	$\frac{(\Omega_3 - \Omega_2)_d}{\delta\Omega_{2,f}} \times 100$
3.5	6.99	175	0.048	4.5
7	6.58	90	0.084	14.7
14	5.49	55	0.115	41.5
16.5	5.23	50	0.114	49.0
19	4.78	40	0.115	56.6

TAB. 1 – Évolution des paramètres avec  $t_f$ .

En premier lieu, l’évolution de la consommation totale en ergols est conforme à nos attentes : elle diminue lorsque le temps de déploiement augmente, car la stratégie optimale profite de plus en plus de l’effet du  $J_2$ . Ensuite, nous obtenons confirmation de l’observation faite précédemment : l’écart de demi-grand axe nécessaire à la création du déphasage final  $\delta\alpha_{2,f}$  diminue quand  $t_f$  croît.

De même, la dérive relative en  $\Omega$  augmente régulièrement avec  $t_f$ , la stratégie utilisant progressivement l’effet du  $J_2$ , au détriment de l’effet direct des poussées hors plan sur  $\Omega$ . En revanche, nous constatons que l’écart d’inclinaison augmente dans un premier temps puis se stabilise à partir de  $t_f = 14$  jours à la valeur 0.115 deg.

Il est de nouveau possible de confirmer ces résultats à l’aide d’un calcul analytique, en supposant des manœuvres impulsives, et réparties symétriquement entre les satellites, *une*

*fois connue la stratégie optimale de déploiement.* L'intérêt de la commande optimale est justement de fournir ces stratégies, qui plus est de façon précise, et de gérer l'étalement des poussées si nécessaire.

Pour notre application, les calculs impulsionsnels confirment que, pour des valeurs faibles de  $t_f$ , les manœuvres sont localisées en deux points d'arguments de latitude vraie  $\pi/2$  et  $3\pi/2$ . Les poussées hors plan sont alors exclusivement utilisées pour créer un écart "instantané" en  $\Omega$  (cf. Fig. 7). En effet, la durée de déploiement allouée étant trop courte, elle ne permet pas d'utiliser l'effet du  $J_2$  pour faire dériver les paramètres orbitaux.

Ensuite, lorsque  $t_f$  augmente, les positions sur l'orbite où sont réalisées les manœuvres évoluent progressivement vers les nœuds. Autrement dit, les poussées génèrent un écart d'inclinaison  $(i_3 - i_2)_m$ . Celui-ci a tendance à augmenter avec  $t_f$ , pour  $t_f < 16.5$  jours, puis diminue à partir de cette valeur. Il est difficile d'interpréter simplement ce phénomène, car les conditions d'optimalité créent un couplage entre les différentes contributions en  $\Omega$ . Cependant, notons que la pente de la dérive en  $\Omega$ , qui permet de créer l'écart final  $\delta\Omega_{2,f}$  en une durée  $t_f$ , est nécessairement bornée par  $\frac{|\delta\Omega_{2,f}|}{t_f}$ . Or, la quantité  $(i_3 - i_2)_m$  est proportionnelle à cette pente, ce qui implique que :

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} (i_3 - i_2)_m = 0.$$

En réalité, les calculs analytiques, basés sur l'hypothèse supplémentaire que les écarts entre les paramètres orbitaux demeurent faibles par rapport aux valeurs nominales, nous donnent l'expression suivante pour l'écart d'inclinaison optimal moyen :

$$(i_3 - i_2)_m = \delta\Omega_{2,f} \frac{t_f}{t_f^2 + t_c^2}, \quad (28)$$

avec  $t_c = \frac{3 R_{\text{eq}}^2 J_2 \sqrt{\mu}}{a^{7/2}}$ , où

- $R_{\text{eq}}$  est le rayon équatorial terrestre,
- $J_2$  l'harmonique zonal d'ordre 2,
- $\mu$  la constante d'attraction de la Terre,
- $a$  est le demi-grand axe des orbites finales.

Nous calculons ici  $t_c = 16.5$  jours, c'est à dire la valeur que nous annonçons précédemment. Il convient d'ailleurs de noter que, *pour  $t_f = t_c$ , l'effet de la dérive est égal à celui des poussées* :  $(\Omega_3 - \Omega_2)_d = \frac{\delta\Omega_{2,f}}{2}$ .

La figure 9 donne l'évolution "théorique" de  $(i_3 - i_2)_m$  en fonction de  $t_f$ , les petits cercles correspondant aux valeurs obtenues expérimentalement à l'aide de la commande optimale.

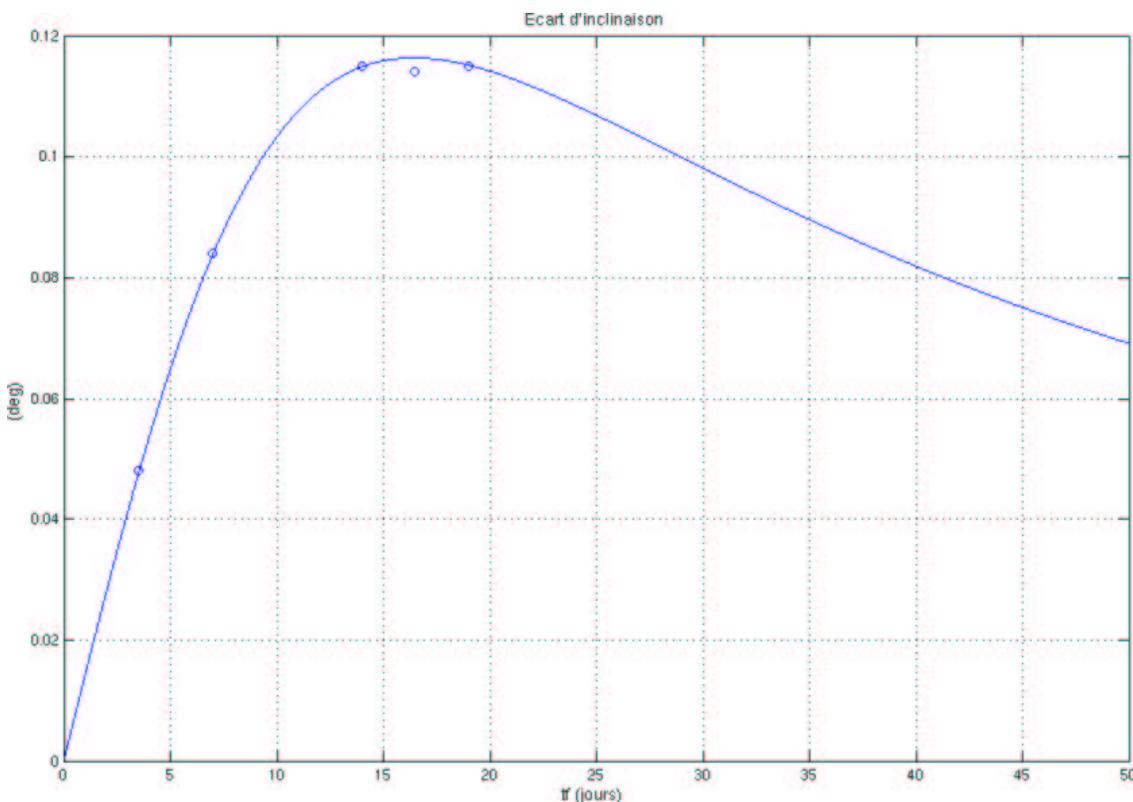


FIG. 9 – Évolution de l'écart d'inclinaison entre  $S_2$  et  $S_3$  avec  $t_f$ .

Cette figure illustre bien les commentaires précédents, et notamment le fait que l'écart d'inclinaison diminue en tendant vers 0 pour  $t_f > 16.5$  jours. Nous observerions probablement ce phénomène pour des valeurs supérieures à 19 jours, mais nous ne sommes pas en mesure, comme l'indique la remarque 5.5, de réaliser ces tests à l'aide de notre méthode.

## 5.4 Équilibrage des consommations

Nous avons testé avec succès cette méthode d'équilibrage des consommations à partir de plusieurs solutions locales du problème (2). Nous présentons d'abord un certain nombre d'observations générales :

1. le processus décrit plus haut fonctionne correctement, l'équilibrage des consommations est réalisé efficacement à partir d'une solution locale de (2), et conduit à une augmentation de la consommation globale associée. Ce résultat est logique puisque le fait d'ajouter une contrainte restreint le domaine des commandes admissibles du problème et, par conséquent, conduit à dégrader le coût optimal.
2. Lorsque  $\theta$  varie de  $\theta_0$  à  $\bar{\theta}$ , la stratégie est inchangée au sens où les écarts moyens entre paramètres orbitaux (demi-grand axe, inclinaison) sont stables. En revanche les dates de

manœuvres et la répartition des poussées entre les satellites sont modifiées, ce qui permet un meilleur équilibrage des consommations.

3. À partir d'une solution locale de (2), associée à une valeur  $\theta_0$  de  $\theta$ , il existe une limite  $\theta_1 \in [\theta_0, 1]$ , telle que pour tout  $\bar{\theta} \in [\theta_0, \theta_1]$ , notre méthode trouve une solution au moins admissible au problème  $(P_{\bar{\theta}, \geq})$ .
4. Le problème  $(P_{\bar{\theta}, \geq})$  peut admettre plusieurs solutions locales.

Pour illustrer les points précédents, nous nous intéressons en particulier à deux solutions localement optimales de (2), notées  $\text{sol}_3$  et  $\text{sol}_2$ . La stratégie correspondant à  $\text{sol}_3$  donne une consommation totale inférieure à celle de  $\text{sol}_2$ , mais présente un déséquilibre plus important de consommation entre les satellites. Nous avons alors mis en œuvre notre méthode, dans le but de modifier  $\text{sol}_3$  et d'obtenir une répartition similaire à celle de  $\text{sol}_2$ . La solution obtenue est notée  $\text{sol}_{32}$ .

Le tableau 2 résume les caractéristiques de ces trois stratégies, en terme de consommation et de répartition. Les cinq stratégies restantes, correspondant aux autres solutions locales de (2) mentionnées plus tôt, y figurent également. Ainsi, la stratégie "globale" (cf. § 5.2.1) correspond à  $\text{sol}_7$  et la stratégie "alternative" (cf. § 5.2.2) est notée  $\text{sol}_5$ . Nous reportons, pour chacune d'entre elles, la consommation totale  $c$ , la quantité  $(1 - \theta)$ , l'écart maximum  $\Delta m_{\max}$  de consommation entre les satellites, et finalement  $\gamma \times 100$  la valeur de  $\gamma$  associée, exprimée en pourcentage.

sol	c (kg)	$(1 - \theta)$	$\Delta m_{\max}$ (kg)	$\gamma \times 100$
1	10.62	$2.0 \times 10^{-6}$	$5.83 \times 10^{-1}$	5.5
2	8.84	$1.7 \times 10^{-5}$	1.97	22
3	8.54	$7.5 \times 10^{-5}$	4.06	48
4	7.34	$1.4 \times 10^{-11}$	$1.61 \times 10^{-3}$	0.02
5	7.12	$1.5 \times 10^{-7}$	$1.60 \times 10^{-1}$	2.2
6	7.05	$1.2 \times 10^{-7}$	$1.38 \times 10^{-1}$	2.0
7	6.58	$4.7 \times 10^{-8}$	$8.61 \times 10^{-2}$	1.3
32	8.72	$1.7 \times 10^{-5}$	1.88	22

TAB. 2 – Bilan des consommations et de leurs répartitions.

**Remarque 5.6** *Le fait que la plupart des solutions locales obtenues, dont celle dite globale, soient "naturellement" équilibrées du point de vue de la répartition des consommations ( $\theta \approx 1$ ), nous a conduit à faire figurer dans ce tableau la valeur  $(1 - \theta)$  au lieu de  $\theta$ . Ce point nous a également conduit à choisir, pour tester notre méthode d'équilibrage, la solution ( $\text{sol}_3$ ), qui présente une valeur de  $\theta$  plus faible.*

En premier lieu, nous avons observé sur les courbes (non présentées ici) que  $\text{sol}_{32}$  correspond à une stratégie du même type que  $\text{sol}_3$ , du point de vue de la mécanique spatiale (valeurs des écarts d'inclinaison, de demi-grand axe). En revanche elle présente la même valeur de  $\theta$  ( $= 0.999983$ ) que  $\text{sol}_2$ . Par ailleurs, la valeur de  $\gamma$  en pourcentage est passée également à 22, ce qui correspond à un écart maximum de consommation similaire en relatif. L'écart maximum en valeur absolue est quant à lui passé de 4.06 kg à 1.88 kg. Enfin, la consommation globale a augmenté, comme annoncé, pour atteindre la valeur de 8.72 kg. Ces résultats indiquent qu'il est possible de modifier simplement la répartition des manœuvres entre les satellites pour améliorer l'équilibrage des consommations, tout en conservant globalement la même stratégie de manœuvres.

## 6 Conclusion

Nous avons présenté ici une méthode efficace de calcul de manœuvres optimales dans le cas du déploiement d'une formation de satellites à poussée continue. La méthode, qui mêle les techniques de continuation-lissage et de commande optimale, inclut notamment une procédure d'initialisation originale, fiable, et qui permet l'adaptation de ces techniques au cas multi-satellite. Elle intègre en outre la possibilité de modifier une solution donnée pour imposer un certain degré de répartition des consommations entre les satellites.

La méthode a été validée sur un problème de déploiement en orbite basse, dans lequel les équations du mouvement des satellites sont non linéaires et prennent en compte l'influence du terme en  $J_2$ . Les difficultés numériques connues dans ce contexte ne sont pas un frein à l'efficacité de l'algorithme, capable de calculer des stratégies localement optimales de déploiement sur une vingtaine de jours. Dans le cas de notre application, sept stratégies au total ont donc été isolées et comparées pour  $t_f = 7$  jours. Elles ont permis de révéler l'intérêt de ce type de méthodes dans un contexte où les dates, les durées, et l'orientation des poussées ne sont pas connues à l'avance. Nous avons également montré qu'à la limite, le logiciel produisait des manœuvres quasi-impulsionnelles.

Il serait aujourd'hui intéressant de considérer de nouvelles applications, comme les formations en orbite (HEO), afin de tester numériquement la méthode dans un autre contexte. Les applications potentielles en terme d'analyse de missions actuelles et futures sont nombreuses.

Enfin, il reste à développer un moyen de garantir l'évitement des collisions entre satellites, lors du déploiement ou de la reconfiguration. Comme nous le mentionnions déjà dans l'introduction, ce problème reste ouvert dans le cas de l'utilisation des méthodes indirectes basées sur le PMP.

# Références

- [1] R. Bertrand and R. Epenoy. New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems - numerical results and statistical interpretation. *Optimal Control Applications and Methods*, 23 :171–197, 2002.
- [2] R. Bertrand and R. Epenoy. Résolution numérique des problèmes de commande optimale à solution "bang-bang" à l'aide de techniques de lissage. Note technique 147, CNES, Centre Spatial de Toulouse, 2002.
- [3] A. E. Bryson and Y. C. Ho. *Applied Optimal Control*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1975.
- [4] M. Campbell, D. Zanon, and J. Kulkarni. Cluster planning and control for spacecraft formations. In *14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference*, Maui, Hawaii, U.S.A., 2004.
- [5] L. Cesari. *Optimization - Theory and applications*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [6] W. H. Clohessy and R. S. Wiltshire. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *J. Aerospace Sci.*, 27(9) :653–658, 1960.
- [7] J. R. Dormand and P. J. Prince. Practical Runge-Kutta processes. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 10(5) :977–989, 1989.
- [8] I. Garcia and J. P. How. Trajectory optimization for satellite reconfiguration maneuvers with position and attitude constraints. In *IEEE American Control Conference*, pages 889–895, Portland, Oregon, U.S.A, 2005.
- [9] V. M. Guibout and D. J. Scheeres. Spacecraft formation dynamics and design. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(1) :121–133, 2006.
- [10] G. W. Hill. Researches in the lunar theory. *Amer. J. Math*, 1(1) :5–26, 1878.
- [11] O. Junge and S. Ober-Blobaum. Optimal reconfiguration of formation flying satellites. In *IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 66–71, Seville, Spain, 2005.
- [12] Y. Kim, M. Mesbahi, and F. Y. Hadaegh. Dual-spacecraft formation flying in deep space : Optimal collision-free reconfigurations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(2) :375–379, 2003.
- [13] Y. Kim, M. Mesbahi, and F. Y. Hadaegh. Multiple-spacecraft reconfiguration through collision avoidance, bouncing, and stalemates. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 122(2) :323–343, 2004.
- [14] D. F. Lawden. In *Optimal trajectories for space navigation*, pages 76–81. Butterworths London, 1963.

- [15] N.E. Leonard and E. Fiorelli. Virtual leaders, artificial potentials and coordinated control of groups. In *40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2968–2973, Orlando, FL, USA, 2001.
- [16] H.-C. Lim, H.-C. Bang, K.-D. Park, and W.-K. Lee. Optimal formation trajectory-planning using parameter optimization technique. *J. Astron. Space Sci.*, 21(3) :209–220, 2004.
- [17] M. B. Milam, N. Petit, and R. M. Murray. Constrained trajectory generation for microsatellite formation flying. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Montreal, Canada, 2001.
- [18] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical theory of optimal processes*. Pergamon Press LTD., 1964.
- [19] M. Powell. A hybrid method for nonlinear equations. In P. Rabinowitz, editor, *Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations*, pages 87–144. Gordon and Breach Science, London, 1970.
- [20] A. Richards, J. P. How, T. Schouwenaars, and E. Feron. Plume avoidance maneuver planning using mixed integer linear programming. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Montreal, Canada, 2001.
- [21] H. Schaub and K. T. Alfriend.  $J_2$  invariant relative orbits for spacecraft formations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 79(2) :77–95, 2001.
- [22] J. S. Seo and W. E. Wiesel. Low thrust control optimization for satellite formation. In *14th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference*, Maui, Hawaii, U.S.A., 2004.
- [23] G. Singh and F. Hadaegh. Autonomous path-planning for formation flying applications. In *16th International Symposium on Space Flight Dynamics*, Pasadena, California, U.S.A., 2001.
- [24] M. Tillerson and J. P. How. Formation flying control in eccentric orbits. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Montreal, Canada, 2001.
- [25] H. Umehara and C. R. McInnes. Fuel-optimum near-miss avoidance control for clustered satellites. In *18th International Symposium on Space Flight Dynamics*, Munich, Germany, 2004.
- [26] S. R. Vadali, H. Schaub, and K. T. Alfriend. Initial conditions and fuel-optimal control for formation flying of satellites. In *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Portland, Oregon, U.S.A, 1999.
- [27] G. Yang, Q. Yang, V. Kapila, D. Palmer, and R. Vaidyanathan. Fuel optimal manoeuvres for multiple spacecraft formation reconfiguration using multiagent optimization. *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, 12 :243–283, 2002.

## A Stratégie exclusivement tangentielle

Nous nous plaçons ici dans le cadre du problème (2) et pour les valeurs numériques données en § 5. Nous considérons tout d'abord une stratégie de déploiement consistant à faire dériver, grâce au  $J_2$ , l'angle  $\Omega$  entre  $S_2$  et  $S_3$ , en créant un écart *de demi-grand axe* entre ces mêmes satellites à l'aide de poussées tangentielles.

Sous certaines hypothèses faibles, que nous énonçons à présent, nous nous proposons de montrer ici qu'il est en général impossible d'obtenir simultanément, à  $t = t_f$ , entre  $S_2$  et  $S_3$ , les écarts visés en  $\Omega$  ( $\Delta \Omega$ ) et en  $\alpha$  ( $\Delta \alpha$ ) à l'aide de ces seules poussées tangentielles. Par conséquent des manoeuvres significatives (hors plan) supplémentaires seront nécessaires. (Conformément à la remarque 5.3, la stratégie doit de toute façon comporter de très faibles manoeuvres hors plan, de façon à corriger l'effet oscillatoire du  $J_2$  sur l'inclinaison).

### Hypothèses :

Nous supposons l'existence de  $n \times 2$  ( $n$  par satellite) manoeuvres impulsionnelles tangentielles, réparties de manière symétrique entre les satellites  $S_2$  et  $S_3$ . Ces manoeuvres sont réalisées aux instants  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , avec  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = t_f$ , et  $t_{k+1} - t_k = \Delta t_k$ ,  $\forall k = 1, \dots, n$ . De plus, elles sont telles que, pour  $k = 1, \dots, n$  :

$$\begin{cases} a_2(t) = a_{2,k} = a_2(t_k) = a_2(t_{k-1}) - \frac{\delta a^k}{2} \\ a_3(t) = a_{3,k} = a_3(t_k) = a_3(t_{k-1}) + \frac{\delta a^k}{2} \end{cases} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}[. \quad (29)$$

Les demi-grands axes initiaux étant supposés égaux (cf. § 5), nous avons par ailleurs :

$$\begin{cases} a_2(t) = a_{2,0} = a_2(t_0) = a_0 \\ a_3(t) = a_{3,0} = a_3(t_0) = a_0 \end{cases} \quad \forall t \in [t_0, t_1[. \quad (30)$$

L'expression des demi-grands axes dans (29) traduit la "symétrie des manoeuvres" évoquée plus haut. De plus, nous ne prenons en compte que l'effet séculaire du  $J_2$  sur  $\Omega$ . Enfin, les orbites sont considérées comme parfaitement circulaires ( $e = 0$ ) et l'écart de demi-grand axe  $\Delta a(t) = a_3(t) - a_2(t)$  est supposé négligeable devant la valeur  $a_0$ , soit  $\Delta a(t) \ll a_0$ ,  $\forall t \in [t_0, t_f]$ .

Preuve :

D'après (29) et (30), nous avons, pour  $k = 0, \dots, n$  :

$$\begin{cases} a_2(t) = a_{2,k} = a_0 - \frac{\Delta a^k}{2} \\ a_3(t) = a_{3,k} = a_0 + \frac{\Delta a^k}{2} \end{cases} \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}[,$$

où  $\Delta a^k = \sum_{j=0}^k \delta a^j$  représente l'écart de demi-grand axe "courant" :

$$\Delta a(t) = a_3(t) - a_2(t) = \Delta a^k, \forall t \in [t_k, t_{k+1}[,$$

avec la convention  $\Delta a^0 = \delta a^0 = 0$ .

Entre  $t_k$  et  $t_{k+1}$ , c'est à dire pendant la durée  $\Delta t_k$ , l'écart de demi-grand axe  $\Delta a^k$  crée entre  $S_2$  et  $S_3$  :

– un écart d'ascension droite du noeud ascendant  $\Omega$ , par effet séculaire du  $J_2$ , de la forme :

$$\delta \Omega_k = K_\Omega \Delta a^k \Delta t_k,$$

– un écart d'argument de latitude vraie (mouvement Keplerien) de la forme :

$$\delta \alpha_k = K_\alpha \Delta a^k \Delta t_k,$$

au premier ordre en  $\frac{\Delta a^k}{a_0}$ .

Les constantes  $K_\Omega$  et  $K_\alpha$  ont pour expression :

$$K_\Omega = \frac{21}{4} \frac{R_{\text{eq}}^2 J_2 \sqrt{\mu} \cos(i)}{a_0^{9/2}},$$

$$K_\alpha = -\frac{3\sqrt{\mu}}{2a_0^{5/2}},$$

où

- $R_{\text{eq}}$  est le rayon équatorial terrestre,
- $J_2$  l'harmonique zonal d'ordre 2,
- $\mu$  la constante d'attraction de la Terre,
- $i$  l'inclinaison des satellites.

Ces contributions élémentaires s'ajoutent pour donner, en fin de déploiement, i.e. après une durée  $t_f$ , les expressions suivantes des écarts totaux :

– d'ascension droite du noeud ascendant  $\Omega$  :

$$\Delta\Omega = \sum_{k=0}^n \delta\Omega_k = K_\Omega \sum_{k=0}^n \Delta a^k \Delta t_k = K_\Omega t_f (a_3 - a_2)_m$$

– d'argument de latitude vraie :

$$\Delta\alpha = \sum_{k=0}^n \delta\alpha_k = K_\alpha \sum_{k=0}^n \Delta a^k \Delta t_k = K_\alpha t_f (a_3 - a_2)_m,$$

conformément à la notation définie en § 5.2. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} t_f (a_3 - a_2)_m &= \int_0^{t_f} (a_3(t) - a_2(t)) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} (a_3(t) - a_2(t)) dt \\ &= \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Delta a^k dt \\ &= \sum_{k=0}^n \Delta a^k \Delta t_k. \end{aligned}$$

Par conséquent, les écarts visés en  $\Omega$  et en  $\alpha$  sont tous deux proportionnels à la moyenne temporelle de l'écart de demi-grand axe sur la durée de déploiement. Il n'est donc pas possible de satisfaire simultanément les deux exigences associées, sauf dans le cas très particulier où les valeurs visées vérifient  $\Delta\Omega = \frac{K_\Omega}{K_\alpha} \Delta\alpha$ .